Isometrier – Stive bevegelser i planet

Isometri: En avbildning som bevarer lengder

$$m: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

(Lineær) avbildning

$$\|m(P) - m(Q)\| = \|P - Q\| \qquad P, Q \in \mathbb{R}^2$$

Eksempel. 1) Translasjon $T(P) = P + \bar{v}$

$$T(P) - T(Q) = P + \bar{v} - (Q + \bar{v}) = P - Q$$

Viktig egenskap:

Sett $Q = \bar{0}$. Da gir definisjon for en lineær avbildning ($m(\bar{0}) = \bar{0}$):

$$\|m(P) - m(\bar{0})\| = \|m(P)\| = \|P\|$$

Konsekvens $m(P+Q) = m(P) + m(Q)$

$$\|m(P+Q)\|^2 = \|P+Q\|^2 = (P+Q)\cdot(P+Q)$$

$$= P\cdot P + 2\,P\cdot Q + Q\cdot Q$$

$$= \|P\|^2 + 2\,P\cdot Q + \|Q\|^2$$

$$\|m(P) + m(Q)\|^2 = (m(P)+m(Q))\cdot(m(P)+m(Q))$$

$$= \|m(P)\|^2 + 2\,m(P)\cdot m(Q) + \|m(Q)\|^2$$

Siden $\|P\|^2 = \|m(P)\|^2$ og $\|Q\|^2 = \|m(Q)\|^2$

får vi $m(P)\cdot m(Q) = P\cdot Q$

(kan bruke dette som definisjon av isometri.)

Lineæravbildning $m(P) = A \cdot P$

$$m(P) \cdot m(P) = (A \cdot P)^T (A \cdot P) = P^T A^T A P$$

$$P \cdot P = P^T P$$

Hvis $P^T A^T A P = P^T P$ for alle P, så må

$$A^T A = I$$

dvs A er ortogonal

Konklusjon

Isometrier i planet:

- Translasjoner $T(P) = P + \bar{v}$
- Lineæravbildninger $T(\bar{v}) = A\bar{v}$ A ortogonal
  - To undertyper: $\det(A) = 1$ rotasjon
    $\det(A) = -1$ refleksjon

Nyttig observasjon:

Sammensetting og invers av isometrier er også isometrier.

Vi sier: Rotasjoner er ordningsbevarende
Refleksjoner er ordningsreverserende

Sammensettinger av isometrier

$$\underset{\bar{b}_1}{\text{Translasjon}} + \underset{\bar{b}_2}{\text{Translasjon}} = \underset{\bar{b}_1+\bar{b}_2}{\text{Translasjon}}$$

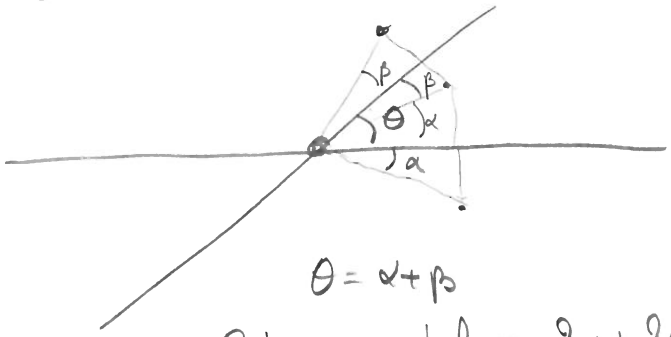
$$\underset{\alpha}{\text{Rotasjon}} + \underset{\beta}{\text{Rotasjon}} = \underset{\alpha+\beta}{\text{Rotasjon}}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Summeformel for cos/sin

Refleksjon + Refleksjon = Rotasjon
det = -1 det = -1 det = 1.



$\theta = \alpha + \beta$

Rotasjonsvinkel $= 2\alpha + 2\beta = 2\theta$

Dvs. Rotasjon med dobbelt av vinkelen mellom linjene

Rotasjon + Refleksjon = Refleksjon over annen linje

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad I - 2\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}}$

Refleksjon S: $S^T = S^{-1}$, $S^2 = I$ $\Rightarrow S = S^T$

$\theta = 2\psi$:

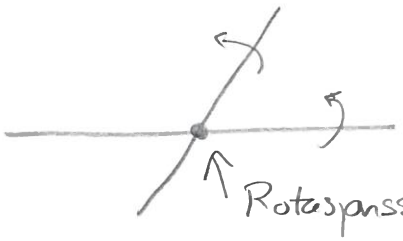
$\Rightarrow R_\psi S = (R_\psi S)^T = S^T R_\psi^T = S R_\psi^T$

$$I - 2\frac{R_\psi \bar{v}(R_\psi \bar{v})^T}{(R_\psi \bar{v})^T(R_\psi \bar{v})} = R_\psi R_\psi^T - 2\frac{R_\psi \bar{v}\bar{v}^T R_\psi^T}{\bar{v}^T\bar{v}} = R_\psi\left(I - 2\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}}\right)R_\psi^T$$

$$= R_\psi R_\psi\left(I - 2\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}}\right) = R_\theta\left(I - 2\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}}\right)$$

Sammensettinger med translasjon / Refleksjon, rotasjon $\neq \bar{0}$

2 refleksjoner



2 rotasjoner gir rotasjon om nytt punkt

Spesialtilfelle $R_\theta, R_{-\theta}$ gir translasjon

Refleksjon + translasjon = Glide-refleksjon

Orden til rotasjon: $R_\theta^n = I$

-11- refleksjon: $S^n = I$ $\underline{\underline{n=2}}$

Kommutasjonsregler $R_\theta, S, T_{\vec{b}}$

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_2} R_{\theta_1}$$

$$R_\theta S = S R_{-\theta}$$

$$R_\theta T_{\vec{b}} = T_{R_\theta \vec{b}} R_\theta$$

$$S_1 S_2 = R_\psi \quad S_2 S_1 = R_{-\psi}$$

$$S T_{\vec{b}} = T_{S\vec{b}} S$$

$$T_{\vec{a}} T_{\vec{b}} = T_{\vec{b}} T_{\vec{a}}$$

$\Rightarrow$ Kan skrive isometrier som RST.