Stive bevegelser – isometrier

Isometri: $m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2 ; \|m(P) - m(Q)\| = \|PQ\|$$

alternativt: $m(P) \cdot m(Q) = P \cdot Q$

Isometrier som også er lineæravbildninger:

$$m(\bar{v}) = A \cdot \bar{v}$$

for en ortogonal 2×2-matrise

To typer:

Rotasjoner $\det = 1$ orienteringsbevarende
Refleksjoner $\det = -1$ orienteringsreverserende

Isometrier som ikke er lineæravbildninger:

Translasjoner $T(\bar{v}) = \bar{v} + \bar{b}$

og sammensettinger av rotasjon/refleksjon og translasjon

$\Rightarrow$ Enhver plan isometri:

$$m(\bar{v}) = \underset{2\times 2}{A}\,\bar{v} + \underset{2\times 1}{\bar{b}}$$

Rotasjoner $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Refleksjon om x-aksen $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Fixpunkter: $\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid m(\bar{x}) = \bar{x}$

Rotasjon: ett fixpunkt
Refleksjon: en linje av fixpunkter
Glide-refleksjon og translasjon: ingen fixpunkter

Border: 

- eller. RRRRR...

Translasjon	...RRR...	T
Vertikal Refleksjon	...ꟻꟻꟻ...	μ
Horisontal Refleksjon	...ƃƃƃ...	σ
180° Rotasjon	...ꟽꟽ...	ρ

Alle er stive bevegelser $\sigma = \rho\mu$

$\rho = \sigma\mu$

$\mu = \sigma\rho$

Klassifikasjon

	μ	σ	ρ	$T_{1/2}\sigma$	
	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	-	
J	Nei	Nei	Nei	-	
S	Nei	Nei	Ja	-	
E	Nei	Ja	Nei	-	
A	Ja	Nei	Nei	-	
H	Ja	Ja	Ja	-	
AV	Ja	Nei	Ja	Ja	
AEVE	Nei	Nei	Nei	Ja	

I tillegg til fixpunkt kan vi ha fix-mengde, f.eks glide-refleksjon



Fixerer ingen punkter, men fixerer linja l.

Eks $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x + y \\ x + \sqrt{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{II - \frac{1}{\sqrt{3}}I} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot II} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I - II} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{3}}I} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eksempel Isometrier T_1: $S_{\frac{\pi}{4}}$ om $(1,1)$

T_2: refleksja om $y = x$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$T_1(\bar{v}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\left(\bar{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\bar{v} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\bar{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$T_2(\bar{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Hva er $T_1 \circ T_2$

$$T_1\left(T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

$$= T_1\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Refleksjon sidelen satt sammen av rotasjon og refleksjon

Fikspunkte $T_1\left(T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 = x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 - \sqrt{2} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x + \sqrt{2} = \sqrt{2}x \\ y + x + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}y \end{cases}$$

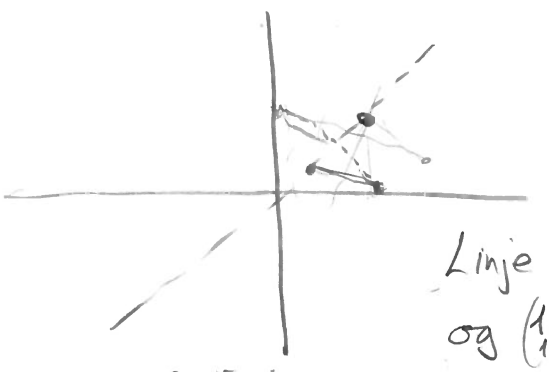
$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x - y = \sqrt{2} \\ x + (1-\sqrt{2})y = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \quad \Big| \; 1+\sqrt{2}$$

$2 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \to$

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x - y = \sqrt{2} \\ (1+\sqrt{2})x - y = \sqrt{2} \end{cases}$$

dvs. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\(1+\sqrt{2})x - \sqrt{2}\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Refleksjon over linja $(1+\sqrt{2})x - y = \sqrt{2}$



$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \frac{2-\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-\sqrt{2}\\2+\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Linje gjennom $\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\frac{4-\sqrt{2}}{4}\\\frac{2-\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$

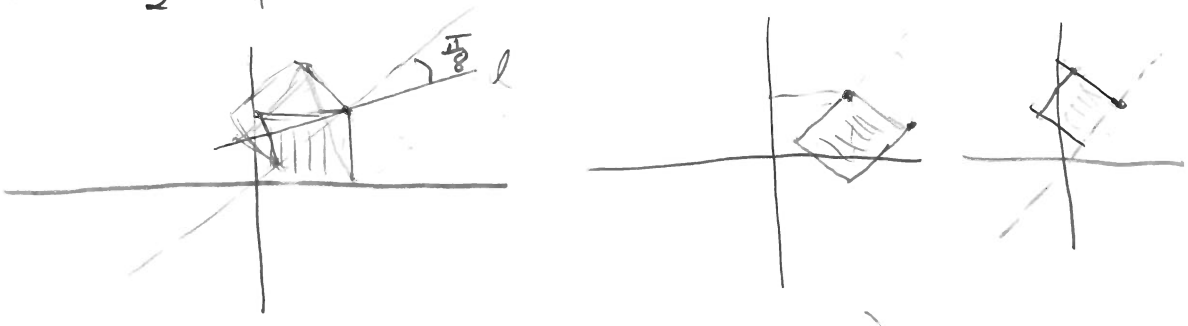
og $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$y - 1 = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4} - 1}{\frac{4-\sqrt{2}}{4} - 1}(x-1) \quad \text{eller} \quad y - 1 = \frac{-2-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}(x-1)$$

$$y - 1 = (\sqrt{2}+1)(x-1) = \sqrt{2}x + x - \sqrt{2} - 1$$

dvs $\underline{(1+\sqrt{2})x - y = \sqrt{2}}$

Bytte om $T_2 \circ T_1$



$T_2 T_1 = T_3$ (refleksjon om linj l)

$T_3 T_2 = T_1^{-1}$ rotasjon med vinkel $-\frac{\pi}{4}$

Skjæringspunkt av linjene = fikspunkt = $(1,1)$

T_2: refleksjon om $y = x$
T_3: refleksjon om l
} vinkelen mellom = θ

Rotasjon om $\binom{1}{1}$ med vinkel $-\frac{\pi}{4} = 2\theta$

dvs $\theta = -\frac{\pi}{8}$.

Eks 2023 oppg. 3 $T(\vec{v}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\vec{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Finn fikspunktmengde og hva slags isometri

Finn T^2 og hva slags isometri.

Fixpunkt: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

dvs $\begin{cases}\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 1 = x\\ -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3 = y\end{cases}$

$\begin{cases}4x - 3y + 5 = 5x\\ -3x - 4y + 15 = 5y\end{cases}$

$\begin{cases}-x - 3y = -5\\ -3x - 9y = -15\end{cases}$

Alle punkte på linja $\underline{x+3y=5}$

$\Rightarrow$ T er en refleksjon om denne linja

T^2 er identiteten

$$T^2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = T\left(T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4-9\\ -3-12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ -3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Rotasjon $\frac{\pi}{3}$ om $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$

Til sammen: Rotasjon med vinkel $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3} = \pi$.

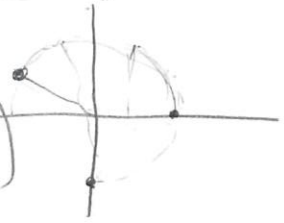
$$S_{\frac{\pi}{3}}\left(S_{\frac{\pi}{3}}\left(S_{\frac{\pi}{3}}\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= S_{\frac{\pi}{3}}\left(S_{\frac{\pi}{3}}\left(S_{\frac{\pi}{3}}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - S_{\frac{\pi}{3}}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= S_{\frac{\pi}{3}}\left(S_{\frac{2\pi}{3}}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - S_{\frac{2\pi}{3}}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + S_{\frac{\pi}{3}}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= S_{\pi}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - S_{\pi}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + S_{\frac{2\pi}{3}}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} + S_{\frac{\pi}{3}}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$S_{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad S_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad S_{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



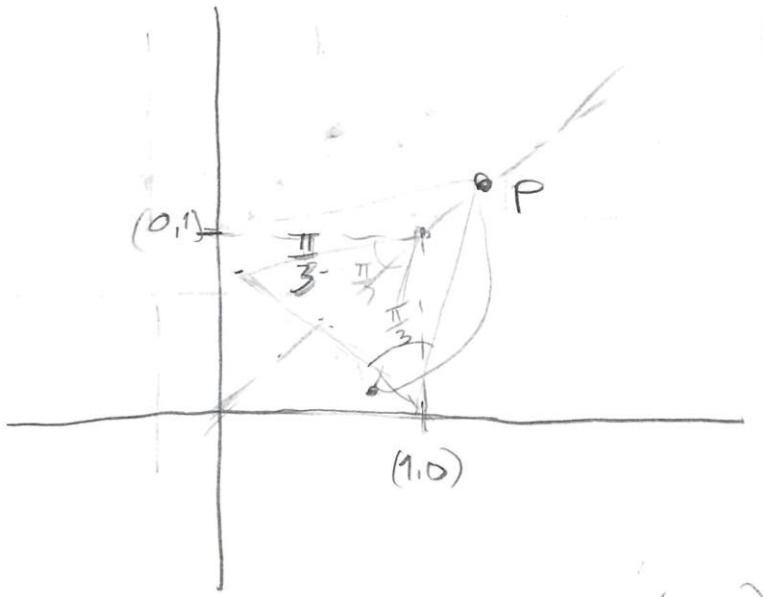
$$= \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{3+\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fixpunkt $\quad -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{3+\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\frac{3+\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\to \frac{3+\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2-\sqrt{3}+\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}-3-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2+8 \\ -2\sqrt{3}-4+8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Speile om $x=0$, $y=1$, $x=1$, $y=0$

Vinkelen mellom $-\frac{\pi}{2}$ hele veien

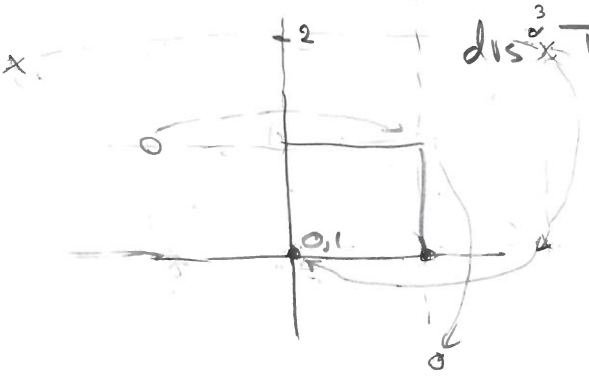
Speile om $x=0, y=1$ = Rotasjon om $(0,1)$ $-\pi$

— " — $x=1, y=0$ = — " — $(1,0)$ $-\pi$

Sammensetning: Rotasjon med -2π ; Translasjon

dvs $T(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{b}$

dvs $T(\bar{0}) = \bar{b}$



$T(\bar{x}) = \bar{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

dvs $(2,-2)$

Rotasjon θ om P, deretter $-\theta$ om Q

$$R_{-\theta}\left(R_\theta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P\right) + P - Q\right) + Q$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P + R_{-\theta}(P-Q) + Q$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (R_{-\theta} - 1)(P-Q)$$

Fehsp $\theta = \frac{\pi}{3}$ $R_{-\theta} - 1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = S_{\frac{4\pi}{3}}$

