Symmetrier av plane figurer

$m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ isometri $F \subseteq \mathbb{R}^2$ delmengde.

1) m kalles en SYMMETRI av F dersom $m(F) = F$.

2) Mengden av symmetrier av F skrives $\mathrm{Sym}(F)$
   - Sammensetting av symmetrier er en symmetri
   - identiteten er en symmetri
   - inversen til en symmetri er en symmetri

(Med disse egenskapene kalles $\mathrm{Sym}(F)$ en symmetrigruppe)

~~Eksempler~~:

Det er sammenheng mellom fixmengder (svakere begrep enn fixpunktmengder)

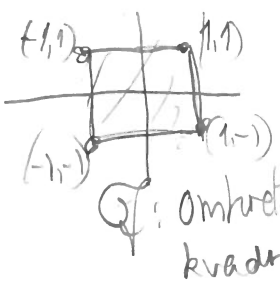
$m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometri $\emptyset \neq \mathcal{F}(M)$: fixmengden

$\mathcal{F}(M) = \mathcal{G}$ største mengden $\neq \mathbb{R}^2$ som er lukket under komposisjon

$\mathrm{Iso}(\mathcal{F})$ = mengden av isometrier som fikserer $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F} \subsetneq \mathbb{R}^2$

Eks.



$\mathcal{F}$: omkretsen av kvadratet

$\mathrm{Sym}(\mathcal{F})$: $S_{\frac{\pi}{2}}$, orden 4

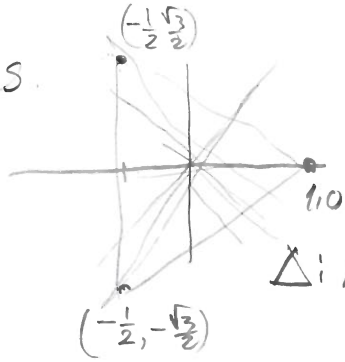
Refleksjoner om
- x-aksen
- y-aksen
- $y = x$
- $y = -x$

S
Speiling

$\mathcal{R}(S)$: Refleksjonsakse l

$Iso(l)$: - refleksjon om l
- translasjon langs l
- kombinasjoner av disse

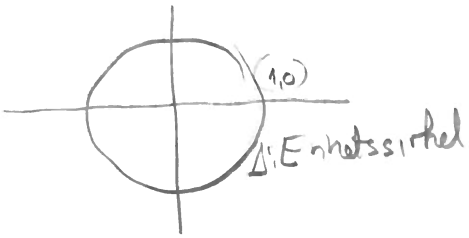
Eks



Δ: Likesidet trekant

$Sym(\Delta)$: Rotasjon med vinkel $\frac{2\pi}{3}$
Refleksjone om
- x-akse
- de to andre diag

Eks



Δ: Enhetssirkel

$Sym(\Delta)$:
- Enhver rotasjon
- Refleksjon om vilkårlig linje gjennom origo

Vi sier at m har orden k dersom $k > 0$ er det minste tallet slik at $m^k = id$

$S_{\frac{2\pi}{3}}$ har orden 3 $\quad S_{\frac{2\pi}{3}}^3 = S_{2\pi} = id$

Refleksjon S har orden 2 $\quad S^2 = id$

Refleksjon S_θ har orden ∞ dersom θ er irrasjonal (ikke brøk)

$$S_{\frac{2\pi}{3}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{fordi } \cos\tfrac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2} \ \sin\tfrac{2\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\frac{2\pi}{3}}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\frac{2\pi}{3}}^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Viktig resultat om isometrier og fixmengder

$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ gir $Sym(\mathcal{F}_2) \subset Sym(\mathcal{F}_1)$

To mengder

Symmetrier til et punkt:

- Alle rotasjoner om punktet
- Alle refleksjoner langs linjer som inneholder punktet

Symmetrier av to punkter: P Q

- Ombyttinger av punktene

Inneholder: • Rotasjoner med vinkel π om midtpunktet mellom punktene
• Refleksjoner om linja gjennom P og Q
• Refleksjoner om midtnormalen til $\overline{PQ}$.

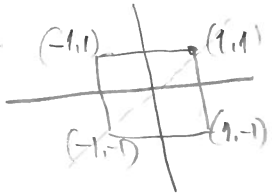
Eks 1) $P=(-1,0)$ $Q=(1,0)$



$S_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotasjon

2) Symmetrier av kvadrat



Rotasjon $S_{\frac{\pi}{2}}$ genererer også S_π og $S_{3\frac{\pi}{2}}$ ved sammensetning (multiplikasjon)

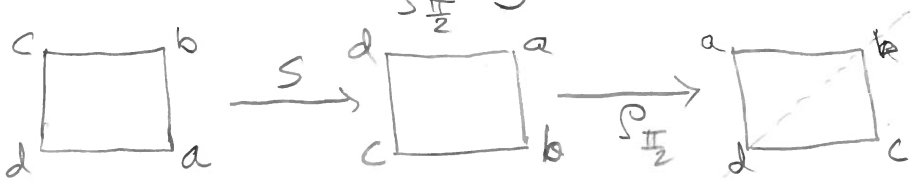
Refleksjon $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ om x-aksen genererer sammen med rotasjonene alle andre refleksjonssymmetrier.

$$S_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

F.eks er refleksjon over $y = x$ gitt ved $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

kan skrives som $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$S_{\frac{\pi}{2}} \circ S$



Måte å skrive dette

$S_{\frac{\pi}{4}}$: $a \to b \to c \to d \to a$ eller $(abcd)$

S : $a \to b \to a \quad c \to d \to c$ eller $(ab)(cd)$

$S_{\frac{\pi}{2}} \circ S$:

$a \to b \to c$
$b \to a \to b$
$c \to d \to a$
$d \mapsto c \to d$

$a \to c \to a$
$b \to b$
$d \to d$

$(ac)(b)(d) = (ac)$