Plane krystaller

Plan krystallstruktur $\mathcal{M}$:

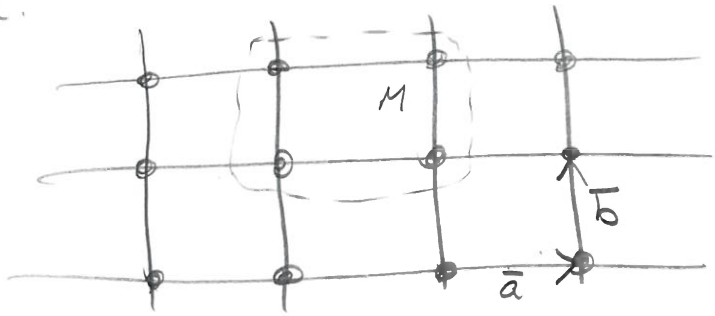
$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ slik at 1) $\exists\ M \subseteq \mathbb{R}^2$ endelig
Punktmengde

2) $\exists \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$

hvor $\mathcal{M} = \{ T_{n\bar{a}+m\bar{b}}(M) \mid n,m \in \mathbb{Z} \}$

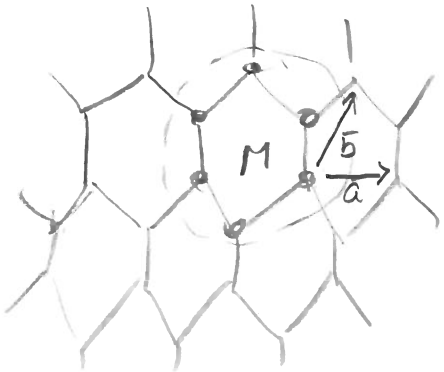
Eksempel.

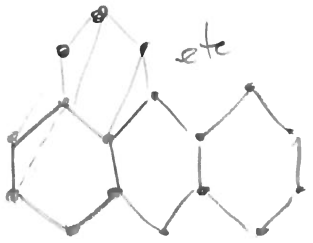
1)



Punktene (ella kantene)

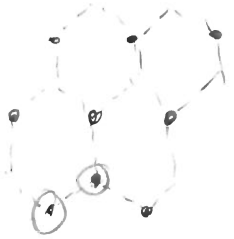
2)





Enhetcelle; En minste del av strukturen som viser hvordan struktur fylla planet og som med unntak av translasjonen bestemmer alle symmetriene til strukturen

- $\subseteq M$
- endelig



To punkter genererer, men er ikke enhetcelle.

Resultat

M plan krystall $\Rightarrow \exists\, d = d(M) > 0$ slik at alle avstande mellom punkter i M er større enn eller lik d.

Bevis

d_0: minste avstand mellom punkt i enhetscelle og punktene i krystallet

Endelig mengde $\Rightarrow \exists d_0 > 0$ som oppfyller

Kan ikke være noen mindre avstand noen annet sted i krystallet

I tillegg til translasjonene kan vi ha rotasjoner S_θ

La $\bar{c}$ være det minste translatet i M, dvs minst $\|\bar{c}\|$ slik at $\bar{c} + M \subseteq M$.

La $P \in M$. Da har vi $P + \bar{c} \in M$ og $S_\theta(P+\bar{c}) \in M$, og $S_\theta^{-1}(P+\bar{c}) \in M$. Det betyr at

$$S_\theta^{-1}(P+\bar{c}) - \bar{c} \in M$$

og

$$S_\theta\left(S_\theta^{-1}(P+\bar{c}) - \bar{c}\right) = P + \bar{c} - S_\theta(\bar{c}) \in M$$

Som betyr at $\|\bar{c} - S_\theta(\bar{c})\| \geq \|\bar{c}\| = 1$

$$\Rightarrow \quad (\bar{c} - S_\theta\bar{c})\cdot(\bar{c} - S_\theta(\bar{c})) = \|\bar{c}\|^2 - 2\|\bar{c}\|\cdot\|S_\theta(\bar{c})\| + \|S_\theta(\bar{c})\|^2$$

θ: vinkelen mellom $\bar{c}$ og $S_\theta(\bar{c})$

$$= 1 - 2\cos\theta + 1 \geq 1$$

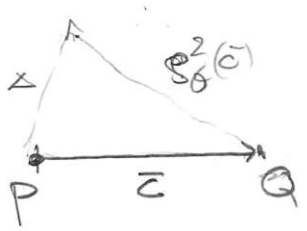
$$\Rightarrow \cos\theta \leq \tfrac{1}{2} \text{ dvs } \theta \geq \tfrac{\pi}{3}$$

Merk også: Rotasjonen må ha endelig orden

$$\Rightarrow \quad \theta = 2\pi, \tfrac{2\pi}{2}, \tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{4}, \tfrac{2\pi}{5}, \tfrac{2\pi}{6} = \tfrac{\pi}{3}$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

Merk: Orden 5 går ikke $\theta = \frac{2\pi}{5}$



$P + \bar{c} + S_\theta^2(\bar{c}) \in M$

$$\Delta = P + \bar{c} + S_\theta^2(\bar{c}) - P = \bar{c} + S_\theta^2(\bar{c}) = (I + S_\theta^2)(\bar{c})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{5} & -\sin\frac{4\pi}{5} \\ \sin\frac{4\pi}{5} & \cos\frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\cos\frac{4\pi}{5} & -\sin\frac{4\pi}{5} \\ \sin\frac{4\pi}{5} & 1+\cos\frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}$$

Legg koordinatsystemet slik at $\bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Det gir

$$\Delta(\bar{c}) = \left\| \begin{pmatrix} 1+\cos\frac{4\pi}{5} \\ \sin\frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} \right\|$$

med lengde $\Delta = 1 + 2\cos\frac{4\pi}{5} + \cos^2\frac{4\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5} = 2\left(1+\cos\frac{4\pi}{5}\right)$

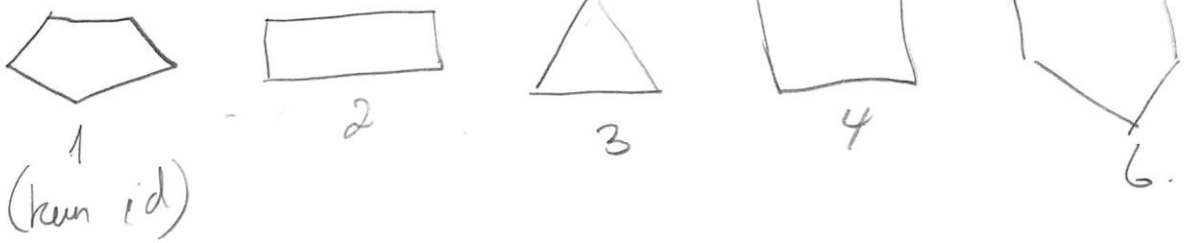
Tabell gir $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$$= 2\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$$

Motsigelse

Konklusjon: Vi kan ha rotasjoner av orden 1, 2, 3, 4, 6



Symmetrier av krystallstrukturer

- Translasjoner i to retninger
- Rotasjoner, orden 1, 2, 3, 4, 6
- Refleksjon

- sette sammen rotasjoner: Rotasjon om tredje punkt
- sette sammen refleksjoner: Rotasjon om snitt med dobbelt av vinkel mellom akser

- translasjon og refleksjon gir glide-refleksjon

Klassifikasjon av 2-dimensjonale krystaller

1. sjekk rotasjoner
2. sjekk refleksjoner
3. rotasjonssentra på refleksjonsakser
4. glide-refleksjoner langs/ikke langs refleksjonsakser

Eksempler



Flere mulige rotasjonssentrum: P, Q, R orden 2
Refleksjon om: $\overline{PQ}$
om: vertikal gjennom Q
Glide-refleksjon langs refleksjonsakse: horisontal gjen R
Glide-refleksjon utenfor refleksjonsakse: vertikal gjennom R