Ortogonale 3×3-matriser

Husk definisjon av $\bar{v} \times \bar{w}$

Repetisjon:
- $A^{-1} = A^T$ evt. $AA^T = Id$
- Søylene danner et ortonormalt system
- $\det(A) = \pm 1$
- Bevares ved produkt
- Alle reelle egenverdier har absoluttverdi 1

Rotasjon: 3×3-ortogonale med $\det(A) = 1$ har en lineær tilstand (egenvektor med $\lambda = 1$)

Refleksjon: ——"—— $\det(A) = -1$ har en egenvektor med egenverdi $\lambda = -1$.

Prop: A ortogonal, $A\bar{v} = \pm\bar{v}$

Sett $W = \bar{v}^{\perp}$ (ortogonalt komplement)

$\Rightarrow AW = W$ (stabilt underrom)

Bevis: $\bar{w} \in W$, dvs $\bar{w}^T\bar{v} = 0$

$$\Rightarrow (A\bar{w})^T\bar{v} = \bar{w}^T A^T\bar{v}$$
$$= \bar{w}^T A^{-1}\bar{v}$$
$$= \bar{w}^T(\pm\bar{v}) = 0 \text{ og } A\bar{w} \in \bar{v}^{\perp}$$

Prop: A ortogonal

$$A\bar{v} \cdot A\bar{w} = \bar{v} \cdot \bar{w}$$

Bevis:
$$A\bar{v} \cdot A\bar{w} = (A\bar{v})^T A\bar{w}$$
$$= \bar{v}^T A^T A\bar{w} = \bar{v}^T I\bar{w}$$
$$= \bar{v}^T\bar{w} = \bar{v} \cdot \bar{w}.$$

A ortogonal 3×3, $\det(A) = -1$ $\Rightarrow$ Egenvektor med egenverdi $\lambda = -1$

$$\chi_A(-1) = \det(A + I) = \det(A + AA^T)$$
$$= \det(A)\det(I + A^T)$$
$$= \det(A)\det(A + I) = \det(A)\chi_A(-1)$$

($\det(A) = -1$)

$$\Rightarrow \underline{\chi_A(-1) = 0}.$$

A ortogonal 3×3, $\det A = 1$ $\Rightarrow$ Egenvektor med egenverdi $\lambda = 1$

$$\chi_A(1) = \det(A - I) = \det(A - AA^T)$$
$$= \det(A)\det(I - A^T)$$
$$= \det(A)\det(I - A)$$
$$= (-1)^3\det(A)\det(A - I) = -\chi_A(1)$$
$$= \cancel{\det =}$$

$$\Rightarrow \chi_A(1) = 0.$$

Refleksjon: $Q_{\bar{v}} = I - 2\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}}$

$$\Rightarrow Q_{\bar{v}}(\bar{v}) = \bar{v} - 2\frac{\bar{v}\bar{v}^T\bar{v}}{\bar{v}^T\bar{v}} = \bar{v} - 2\bar{v} = -\bar{v}$$

dvs. refleksjon over $\bar{v}^{\perp}$

$$Q_{\bar{e}_1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - 2\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(1\,0\,0)}{(1\,0\,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = -1$

Merk: $\bar{v} = (\bar{v}^T \bar{e}_1)\bar{e}_1 + (\bar{v}^T \bar{e}_2)\bar{e}_2 + (\bar{v}^T \bar{e}_3)\bar{e}_3$

Vi skal bruke dette til å vise at

$$A\bar{v} \times A\bar{w} = \det(A) \cdot A(\bar{v} \times \bar{w})$$

Vi bruker trippel produkt for vilkårlig $\bar{x}$

$$(A\bar{v} \times A\bar{w}) \cdot \bar{x} = [A\bar{v}, A\bar{w}, \bar{x}] = [A\bar{v}, A\bar{w}, AA^{-1}\bar{x}]$$
$$= \det(A)\,[\bar{v}, \bar{w}, A^{-1}\bar{x}]$$
$$= \det(A)\,(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot A^{-1}\bar{x}$$

$(\bar{u} \cdot \bar{v} = A\bar{u} \cdot A\bar{v})$

$$= \det(A)\, A(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot AA^{-1}(\bar{x})$$
$$= \det(A)\, A(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{x}$$

Når $\bar{u} \cdot \bar{x} = \bar{v} \cdot \bar{x}$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^3$ har vi $\bar{u} = \bar{v}$.

dvs $A\bar{v} \times A\bar{w} = \det(A)\, A(\bar{v} \times \bar{w})$.

Eks. A rotasjon, $\det(A) = 1$

$$A\bar{v} \times A\bar{w} = A(\bar{v} \times \bar{w})$$

Isometri med $m(\bar{0}) = \bar{0}$ betyr $m(\bar{v}) = A \cdot \bar{v}$

Vi har vist at $A\bar{v} \cdot A\bar{w} = \bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{v}^T \cdot \bar{w}$

dvs $\bar{v}^T A^T A \bar{w} = \bar{v} \cdot \bar{w}$

La $\bar{v} = \bar{e}_i$, $\bar{w} = \bar{e}_j$. Det gir $A^T A = B$

$$\bar{e}_i^T B \bar{e}_j = b_{ij}$$

f.eks. $(0\,1\,0)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (b_{21}\, b_{22}\, b_{23})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_{23}$

$$\bar{e}_i^T B \bar{e}_j = \bar{e}_i \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow \underline{B = I}.$$