UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1060 — Matematikk for anvendelser 2
Eksamensdag:	Onsdag 27. mai 2026
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller trykt tekst på begge sider.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1 La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdiene og tilhørende egenvektorer.

b) Regn ut den inverse A^{-1} til A. Finn også egenverdiene til A^{-1}.

OPPGAVE 2 En isometri i planet er gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Finn fikspunktmengden til T og avgjør hva slags isometri T er.

b) Finn ordenen til T. Begrunn svaret ditt.

OPPGAVE 3 I denne oppgaven lar vi $\mathbb{R}^3$ være utstyrt med det vanlige skalarproduktet.

a) To vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ er gitt ved

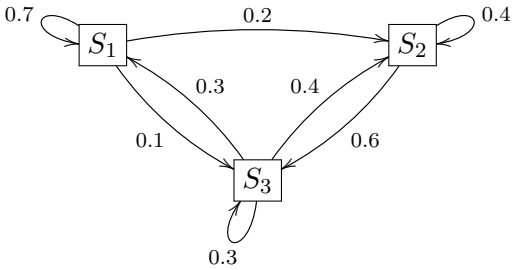
$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en ortonormal mengde, dvs. de to vektorene står normalt på hverandre og har lengde 1.

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE 4 Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram



a) Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen M til diagrammet.

b) Finn en likevektstilstand

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for systemet, slik at $x_1 = 1$.

OPPGAVE 5 La $\mathcal{P}_2$ være mengden av alle reelle polynomer i en variabel, av grad mindre enn eller lik 2. Vi definerer et indreprodukt på $\mathcal{P}_2$ gitt ved

$$< p(x), q(x) >= (p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)), \quad p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2$$

a) Vis at polynomene

$$p_1(x) = 1, \quad \text{og} \quad p_2(x) = x - 2$$

står normalt på hverandre med hensyn på dette indreproduktet. Finn også lengdene (normene) til $p_1(x)$ og $p_2(x)$.

b) Finn et ikke-trivielt polynom $p_3(x) \in \mathcal{P}_2$ som står normalt på $p_1(x)$ og $p_2(x)$.

SLUTT.

(Fortsettes på side 3.)

Vedlegg: Noen nyttige begreper og formler:

Karakteristisk polynom: $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$

Egenvektorer/egenverdier: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\chi_M(\lambda) = 0$

Likevektstilstand: Egenvektor med egenverdi 1

Invers til en 2×2-matrise $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Rotasjon med vinkel θ om $(0,0) \in \mathbb{R}^2$: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Rotasjon med vinkel θ om et punkt P: $T(\mathbf{v}) = R_\theta(\mathbf{v} - P) + P$

Refleksjon om linje $ax + by = 0$: $T(\mathbf{v}) = \left(I - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\right)\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

Fikspunkt for en avbildning: $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$

Dekomposisjon i ortonormal basis: $\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$

Orden til en isometri: Minste $n > 0$ slik at $T^n = \mathrm{id}$