UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1060 — Matematikk for anvendelser 2
Eksamensdag:	Onsdag 27. mai 2026
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller trykt tekst på begge sider.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1 La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdiene og tilhørende egenvektorer.

b) Regn ut den inverse A^{-1} til A. Finn også egenverdiene til A^{-1}.

Løsning:
a)

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

gir egenverdier $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -3$ med tilhørende egenvektorer generert av $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) Vi har $\det A = -6$. Formelen for den inverse matrisen gir

$$A^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

med egenverdier $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2}$ og $\frac{1}{\lambda_2} = -\frac{1}{3}$.

OPPGAVE 2 En isometri i planet er gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Finn fikspunktmengden til T og avgjør hva slags isometri T er.

b) Finn ordenen til T. Begrunn svaret ditt.

(Fortsettes på side 2.)

a)

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gir likningene $y + 1 = x$ og $-x = y$, dvs. fikspunkt for $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. En plan isometri med ett fikspunkt er en rotasjon. Alternativt argument: det $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, dvs. en rotasjon.

b) Orden til T er 4 siden $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 = Id$ og ingen lavere positive potenser gir identiteten.

OPPGAVE 3 I denne oppgaven lar vi $\mathbb{R}^3$ være utstyrt med det vanlige skalarproduktet.

a) To vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en ortonormal mengde, dvs. de to vektorene står normalt på hverandre og har lengde 1.

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

a) Vi har

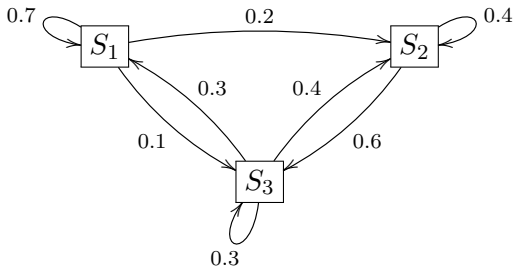
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{9\sqrt{5}}(2 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 2) = 0$$
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{9}(2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 1$$
$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{45}(4 \cdot 4 + (-5) \cdot (-5) + 2 \cdot 2) = 1$$

b)

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \frac{1}{9\sqrt{5}}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE 4 Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram

(Fortsettes på side 3.)



a) Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen M til diagrammet.

b) Finn en likevektstilstand

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for systemet, slik at $x_1 = 1$.

a)

$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gir

$$\begin{aligned} -0.3x_1 \qquad\quad + 0.3x_3 &= 0 \\ 0.2x_1 - 0.6x_2 + 0.4x_3 &= 0 \\ 0.1x_1 + 0.6x_2 - 0.7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

dvs. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Oppgave 5 La $\mathcal{P}_2$ være mengden av alle reelle polynomer i en variabel, av grad mindre enn eller lik 2. Vi definerer et indreprodukt på $\mathcal{P}_2$ gitt ved

$$< p(x), q(x) >= (p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)), \quad p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2$$

a) Vis at polynomene

$$p_1(x) = 1, \quad \text{og} \quad p_2(x) = x - 2$$

står normalt på hverandre med hensyn på dette indreproduktet. Finn også lengdene (normene) til $p_1(x)$ og $p_2(x)$.

b) Finn et ikke-trivielt polynom $p_3(x) \in \mathcal{P}_2$ som står normalt på $p_1(x)$ og $p_2(x)$.

(Fortsettes på side 4.)

a)

$$\begin{aligned} < p_1(x), p_2(x) > &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 \\ < p_1(x), p_1(x) >^{\frac{1}{2}} &= (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ < p_2(x), p_2(x) >^{\frac{1}{2}} &= ((-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

b) Vi bruker Gram-Schmidt på polynomet $q(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= x^2 - \frac{< x^2, 1 >}{< 1, 1 >} \cdot 1 - \frac{< x^2, x-2 >}{< x-2, x-2 >}(x-2) \\ &= x^2 - \tfrac{14}{3} \cdot 1 - 4(x-2) = x^2 - 4x + \tfrac{10}{3} \end{aligned}$$

som gir $p_3(x) = x^2 - 4x + \frac{10}{3}$.
Alternativt kan vi sette $p_3(x) = ax^2 + bx + c$ og kreve

$$\begin{aligned} &< p_1(x), p_3(x) > \\ &\quad = 1 \cdot (a + b + c) + 1 \cdot (4a + 2b + c) + 1 \cdot (9a + 3b + c) \\ &\quad = 14a + 6b + 3c = 0 \\ &< p_2(x), p_3(x) > \\ &\quad = (-1) \cdot (a + b + c) + 0 \cdot (4a + 2b + c) + 1 \cdot (9a + 3b + c) \\ &\quad = 8a + 2b = 0 \end{aligned}$$

Setter vi $a = 1$ får vi $b = -4$ og $c = \frac{10}{3}$, eller $p_3(x) = x^2 - 4x + \frac{10}{3}$.