10. april 2026

MAT 1060

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 23. april 2026, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

For å få godkjent oppgaven må den leveres inn i Canvas. Du velger selv hvor mye du vil svare på, og du vil få tilbakemelding på det du har levert.

Oppgaven er utformet på samme måte som en eksamensoppgave, og vil gi deg god trening i det du kommer til å møte på eksamen. Men i forhold til endelig eksamen vektlegger obligen litt mer de siste delene av pensum, og er noe større i omfang

I tillegg til tilbakemeldinger vil du få en karakter på oppgaven. Karakteren har ingen betydning ut over å gi et innblikk i hvordan besvarelsen ville ha blitt evaluert. Karakteren blir gitt på bakgrunn av de delspørsmålene som er besvart. Blanke oppgaver vil ikke telle med i vurderingen.

Hvis det skulle vise seg at du av ulike gode årsaker trenger noen dagers utsettelse med innleveringen, så send en epost til <arnebs@math.uio.no> senest kl. 23.59 torsdag 23. april 2026.

Alle 10 delspørsmålene teller like mye (0-10 poeng) og gjeldende karakterskala er som følger (i prosent av maksimalt oppnåelig poengsum):

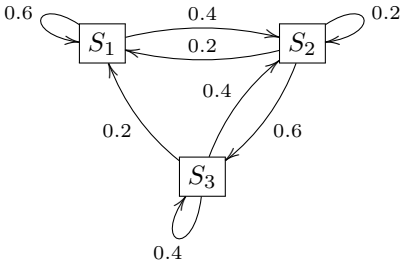
A	B	C	D	E	F
92-100	77-91	58-76	46-57	40-45	0-39

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1. Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram



Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen til diagrammet og finn en likevekts-tilstand

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for modellen, der $x_3 = 100$.

Oppgave 2. La Q være 2×2-matrisen

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

Et indreprodukt på $\mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T Q \mathbf{w}, \qquad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$$

b) Forklar hvorfor dette produktet oppfyller positivitetsegenskapen $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ til indreprodukter.

c) Regn ut lengden (også kalt normen) $\|\mathbf{v}\|$ til vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

med hensyn på dette indreproduktet.

Oppgave 3.

a) Vis at en symmetrisk $n \times n$-matrise Q som oppfyller $Q^2 = Id$ er ortogonal.

b) Forklar hvorfor determinanten til en ortogonal matrise må være lik ± 1.

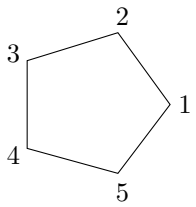
Oppgave 4. En isometri i planet er gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn fikspunktmengden til T og avgjør hva slags isometri T er.

b) Regn ut T^2. Hva slags isometri er dette?

Oppgave 5. En regulær femkant K er gitt som på figuren



La $\rho : 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$ være en rotasjon av K og $\mu : 1 \to 2 \to 1, \quad 3 \to 5 \to 3$ være en refleksjon. Vis at $\rho\mu = \mu\rho^4$.

Oppgave 6. La $\mathcal{P}_2$ være mengden av alle reelle polynomer i en variabel, av grad mindre enn eller lik 2. Vi definerer et indreprodukt på $\mathbb{P}_2$ gitt ved

$$< p(x), q(x) >= \frac{1}{3}\left(p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)\right), \quad p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2$$

La mengden $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ være gitt ved

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x - 1, \quad p_3(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

Vis at $\mathcal{B}$ danner en ortogonal basis for $\mathcal{P}_2$ med hensyn på dette indreproduktet. Er basisen ortonormal?