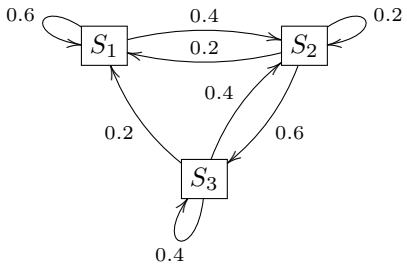
Løsningsforslag, Oblig 2, MAT 1060, våren 2026

Oppgave 1. Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram



Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen til diagrammet og finn en likevekts-tilstand

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for modellen, der $x_3 = 100$.

Løsning.
Vi kaller overgangsmatrisen M.

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Likheten

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

setter opp likningssystemet

$$\begin{aligned} -0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 &= 0 \\ 0.4x_1 - 0.8x_2 + 0.4x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0.6x_2 - 0.6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

som gir $x_1 = x_2 = x_3$ og hvis $x_3 = 100$ får vi $x_1 = x_2 = x_3 = 100$.

Oppgave 2. La Q være 2×2-matrisen

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

Et indreprodukt på $\mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T Q \mathbf{w}, \qquad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$$

b) Forklar hvorfor dette produktet oppfyller positivitetsegenskapen $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ til indreprodukter.

c) Regn ut lengden (også kalt normen) $\|\mathbf{v}\|$ til vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

med hensyn på dette indreproduktet.

Løsning.
a)

$$\chi_Q(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

gir egenverdier $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \geq 0$.
b) Indreproduktet er positivt definit siden begge egenverdiene til Q er positive.
c)

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 - 1 + 2 = 3$$

dvs $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}$.

Oppgave 3.

a) Vis at en symmetrisk $n \times n$-matrise Q som oppfyller $Q^2 = Id$ er ortogonal.

b) Forklar hvorfor determinanten til en ortogonal matrise må være lik ± 1.

Løsning.
a) En symmetrisk matrise oppfyller $Q = Q^T$. $Q^2 = Id$ betyr at $Q^{-1} = Q$, mao. $Q^{-1} = Q^T$ og Q er ortogonal.
b) Vi har

$$\det Q^T = \det Q$$
$$\det Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}$$

som betyr at for $Q^{-1} = Q^T$ så er $\det Q = \frac{1}{\det Q}$, dvs. $\det Q = \pm 1$.

Oppgave 4. En isometri i planet er gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn fikspunktmengden til T og avgjør hva slags isometri T er.

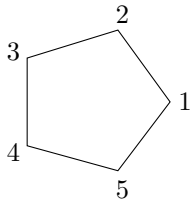
b) Regn ut T^2. Hva slags isometri er dette?

Løsning.
a) $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$ gir $y+1=x$ og $x+1=y$ som åpenbart ikke har noen løsning. Siden det $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$, og vi føyer til en translasjon, vil dette være en glide-refleksjon.
b) Vi har

$$\begin{aligned} T^2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

som beskriver en translasjon.

Oppgave 5. En regulær femkant K er gitt som på figuren



La $\rho : 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$ være en rotasjon av K og $\mu : 1 \to 2 \to 1, \quad 3 \to 5 \to 3$ være en refleksjon. Vis at $\rho\mu = \mu\rho^4$.

Løsning.
Det er ekvivalent å vise $\rho\mu\rho\mu = Id$.

$$\begin{aligned} &1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 1 \\ &2 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2 \\ &3 \to 5 \to 1 \to 2 \to 3 \\ &4 \to 4 \to 5 \to 3 \to 4 \\ &5 \to 3 \to 4 \to 4 \to 5 \end{aligned}$$

Oppgave 6. La $\mathcal{P}_2$ være mengden av alle reelle polynomer i en variabel, av grad mindre enn eller lik 2. Vi definerer et indreprodukt på $\mathbb{P}_2$ gitt ved

$$< p(x), q(x) >= \frac{1}{3}\left(p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)\right), \quad p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2$$

La mengden $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ være gitt ved

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x - 1, \quad p_3(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

Vis at $\mathcal{B}$ danner en ortogonal basis for $\mathcal{P}_2$ med hensyn på dette indreproduktet. Er basisen ortonormal?

Løsning.

$$
\begin{aligned}
\langle p_1(x), p_1(x)\rangle &= \tfrac{1}{3}(1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1) = 1\\
\langle p_1(x), p_2(x)\rangle &= \tfrac{1}{3}(1\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 1\cdot 1) = 0\\
\langle p_1(x), p_3(x)\rangle &= \tfrac{1}{3}(1\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 1\cdot 1) = 0\\
\langle p_2(x), p_2(x)\rangle &= \tfrac{1}{3}((-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1) = \tfrac{2}{3}\\
\langle p_2(x), p_3(x)\rangle &= \tfrac{1}{3}((-1)\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 1) = 0\\
\langle p_3(x), p_3(x)\rangle &= \tfrac{1}{3}(1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1) = 2
\end{aligned}
$$

Basisen er ortogonal, men ikke ortonormal.