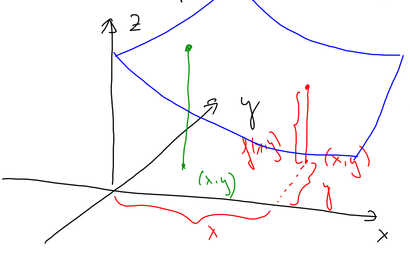
Ingen forelesning på lørdag 4/9.

Funksjoner av flere variable

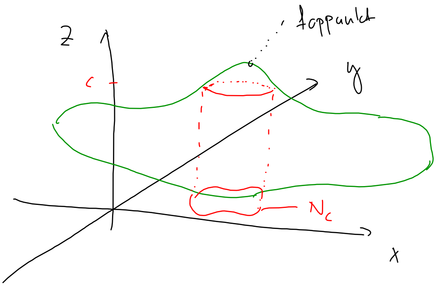
$f : A \to B \qquad x \in A \xrightarrow{\text{tilordner}} f(x) \in B.$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \longrightarrow f(x,y)$

Eksempel: $f(x,y) = x^2 + y^2$



← grafen til $z = f(x,y)$

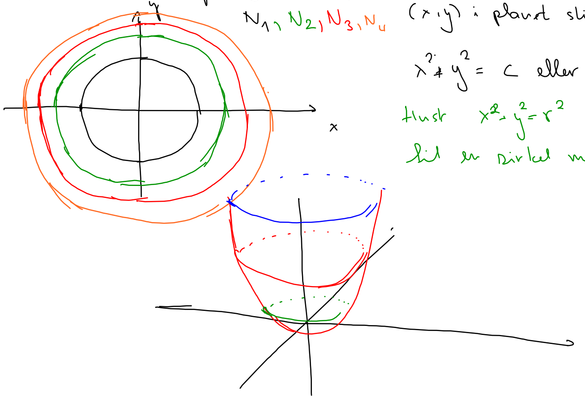


Nivåkurve: $C \in \mathbb{R}$

$N_c = \{(x,y) : f(x,y) = c\}$

Eksempel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

N_1, N_2, N_3, N_4



Nivåkurven N_c består av de punktene (x,y) i planet slik at $f(x,y) = c$

$x^2 + y^2 = c$ eller $x^2 + y^2 = (\sqrt{c})^2$

Sirkel med radius $\sqrt{c}$.

Husk $x^2 + y^2 = r^2$ er ligningen for en sirkel med radius r.

Funksjonar av n variable

$\mathbb{R}^n$ mengden av alle n-tupler $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Eksempler:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 + x_3$$

$$f(x, y, z) = xy^2 + z$$

$$f(x, y, z, u, v) = \sin(xy + v)\, e^{yu + z}$$

Nivåflater: $N_c = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\}$

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad N_c = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = c = (\sqrt{c})^2\}$

kuleflate med radius $\sqrt{c}$.

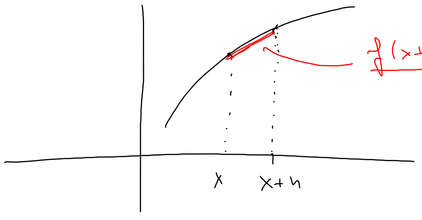
Derivasjon

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definisjon: Den **deriverte** til f i punktet x er

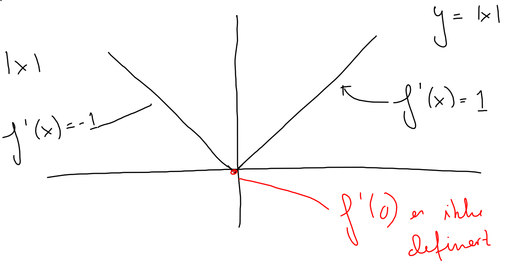
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dersom grenseverdien eksisterer. (hvis den ikke gir def.-rom til f ikke er deriverbar i x)



$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ → stigningstallet til tangenten

Eksempel: $f(x) = |x|$



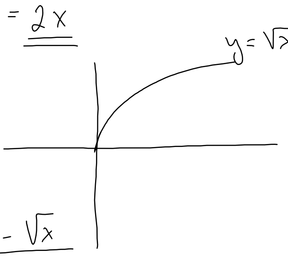
Eksempel: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = \underline{2x}$$

$f'(x) = 2x$

Eksempel: $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$



$x > 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

skriftlig tvriks

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

← ganger med den konjugerte

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Konklusjon: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ for $x > 0$

Derivasjonsregler

Spesielle:

$(C)' = 0$ $\quad C$ konstant

$(x^r) = r x^{r-1}$ $\quad r$ konstant

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Generelle:

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ←

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Kjerneregel: $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$

Utledning av produktregelen:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h)\right] + \lim_{h\to 0}\left[f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

($\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f'(x)$, $g(x+h) \to g(x)$, $f(x) \to f(x)$, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to g'(x)$)

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Eksempel: $f(x) = \sqrt{x}\ln x$, $x > 0$

Produktregelen:

$f'(x) = (\sqrt{x})'\ln x + \sqrt{x}(\ln x)'$

$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})'$

$\frac{x^{1/2}}{x} = x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}}$

$= \frac{1}{2x^{1/2}}\ln x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{2x^{1/2}}\ln x + \frac{1}{x^{1/2}}$

$= \frac{1}{x^{1/2}}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right)$

Eksempel: $f(x) = a^x$ $\quad (a > 0)$

$f(x) = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$ — hjerne

($a = e^{\ln a}$)

$f'(x) = \underbrace{e^{x\ln a}}_{a^x} \cdot \ln a = a^x \ln a$

Eksempel: $f(x) = x^2 e^{\cos x}$

$f'(x) = (x^2)' e^{\cos x} + x^2 (e^{\cos x})'$ — derivate av hjernen

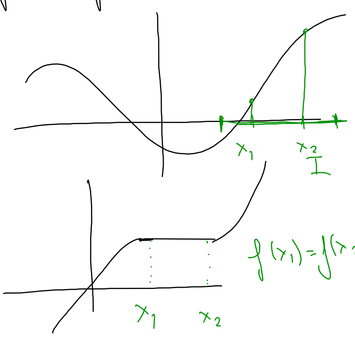
$= 2x e^{\cos x} + x^2 e^{\cos x}(-\sin x)$

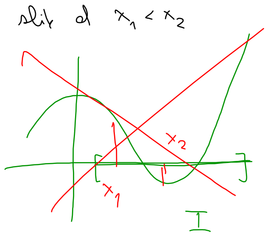
$= x e^{\cos x}(2 - x\sin x)$

Funktionsdriftning

Definition: Funktionen f är **växande** på intervallet I omsom

$f(x_1) \leq f(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in I$ sådan att $x_1 < x_2$





f är **strängt växande** omsom $f(x_1) < f(x_2)$ för alla $x_1 < x_2$ i intervallet I.

---

f är **avtagande** på I omsom $f(x_1) \geq f(x_2)$ för alla punkter $x_1 < x_2$ i I.

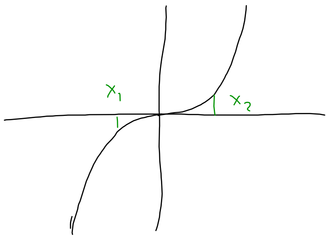
-"- **strängt avtagande** -"- $f(x_1) > f(x)$ -"-

Teorem: Omsom $f'(x) \geq 0$ i alla punkter x i intervallet I, så är f växande på I. Omsom $f'(x) \leq 0$ i alla punkter i intervallet I, så är f avtagande på I.

Exempel: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$

f är växande på hela $\mathbb{R}$.
strängt



Exempel: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 12$

Hur är f växande och hur är den avtagande?

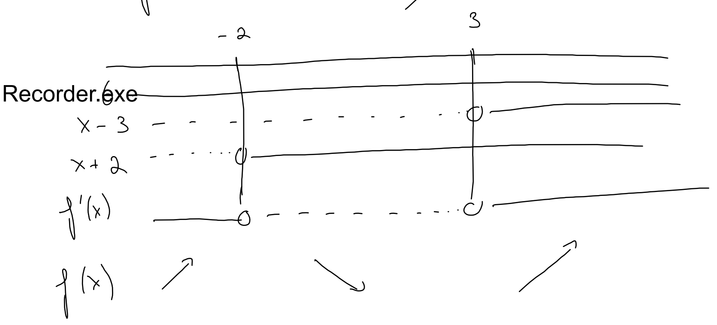
Derivera: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6)$

Löser: $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Faktorisera:

$f'(x) = 6(x-3)(x-(-2)) = 6(x-3)(x+2)$



$f(x)$ är växande på intervallen $(-\infty, -2]$ och $[3, \infty)$
och avtagande på intervallet $[-2, 3]$.