n - tupler

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Radvektor: $[a_1, a_2, \dots, a_n]$

Søylevektor: $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Definisjon: Gitt vektorene $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ og tallene $x_1, x_2, \dots, x_k$, da kalles

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_k\vec{v}_k$$

en **lineærkombinasjon** av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$

Eksempel

$$\vec{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

er en lineærkombinasjon av $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Eksempel: Er $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ en lineærkombinasjon $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Dvs: finnes det tall x, y slik at

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ -x + 0 &= -4 \\ 3x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\}$$ 3 ligning, 2 ukjente = trenger flaks

$x = 4$: Setter inn i første ligning:

$$2 \cdot 4 + y = 6 \Rightarrow y = -2$$

Setter inn i den nederste ligningen:

$$\underbrace{3 \cdot 4}_{=12} + 2y = 8 \Rightarrow 2y = 8 - 12 = -4$$

$$\boxed{y = -2}$$

HURRA!

$x = 4$ og $y = -2$ er en løsning av alle tre ligninger, dvs

$$4\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Definisjon: Vektorene $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ er **lineært uavhengige** dersom

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_k\vec{v}_k$$

bare er lik $\vec{0}$ dersom $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$.

Dersom vektorene ikke er lineært uavhengige, sier vi at de er **lineært avhengige**.

Hva betyr det at $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ er lineært avhengige? Vi kan finne en lin. komb

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

slik at minst en $x_i \neq 0$.

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + \underbrace{x_i\vec{v}_i}_{\neq 0} + \dots + x_k\vec{v}_k = 0$$

$$x_i\vec{v}_i = -x_1\vec{v}_1 - x_2\vec{v}_2 - \dots - x_k\vec{v}_k$$

$$\vec{v}_i = -\frac{x_1}{x_i}\vec{v}_1 - \frac{x_2}{x_i}\vec{v}_2 - \dots - \frac{x_k}{x_i}\vec{v}_k$$

Konklusjon: Hvis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ er lin. avhengige, så kan minst en $\vec{v}_i$ skrives som en lin. komb. av de andre.

Eksempel: Vis at $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ er lineært uavhengige.

Nå vil vi skrive

$$\underbrace{x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så er $x = y = 0$.

Vi har

$$\begin{pmatrix} x + 3y \\ -2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 0 \\ -2x + 4y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x = -3y$

Setter inn i nederst

$-2(-3y) + 4y = 0$

$10y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}}$

$x = -3 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

Konklusjon: Siden $x = 0$ og $y = 0$ er de eneste verdiene som gjør

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

så er disse vektorene lineært uavhengige.

Eksempel: Vis at $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ er lineært avhengige.

Nå finner x og y, ikke lik 0, slik at

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alltid oppfylt.

$$\left.\begin{aligned} 2x - 4y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 2y$$

$(2 \cdot 2y) - 4y = 0$

Alle par (x, y) der $x = 2y$ er en løsning, f.eks $(2, 1)$:

Sjekk

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriser

En $m \times n$ - matrise er et rektangulært oppsett av tall

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

med m rader (linjer) og n søyler (kolonner).

Eksempler: 2×3 - matrise

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \sqrt{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

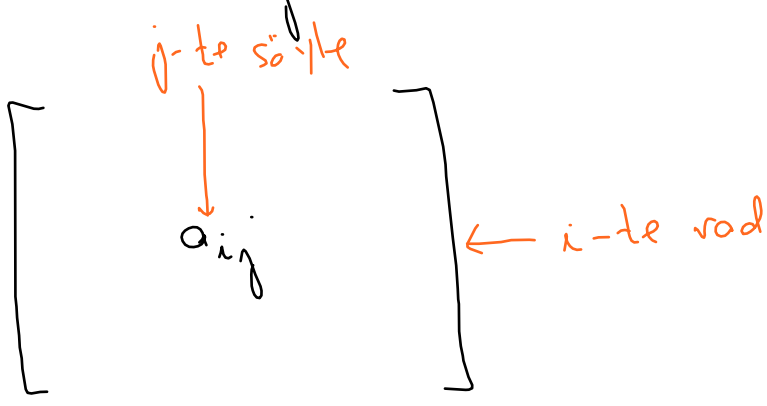
3×2 - matrise

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 1/2 & e^{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

En søylevektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ er en 4×1 - matrise

radvektor $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ er en 1×4 - matrise

Notasjon: a_{ij} er elementet i i-te rad og j-te søyle



Kortnotasjon:

$[a_{ij}]$ - matrisen med a_{ij} som ij-te element.

Regneoperasjon

To søyler med samme dimensjoner

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & & \cdots & \end{bmatrix}$$ Kompaniontir

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & & sa_{1n} \\ & & & \\ & & & \\ sa_{m1} & & \cdots & sa_{mn} \end{bmatrix}$$

tall

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Regn ut: $3A - 2B = 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ -12 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -14 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -26 & 2 & 17 \end{bmatrix}$$

Regneregler:

$$A + B = B + A$$

$$s(A+B) = sA + sB$$

$$(s+t)A = sA + tA$$

Hva skal vi med matriser?

Eksempel: En eplefabrikk mottar epler fra 4 produsenter.

	I	II	III	IV
God	50%	30%	25%	20%
Middels	30%	40%	40%	60%
Brukbart	20%	30%	35%	20%

Forsyning:

I: 4 tonn
II: 5 tonn
III: 3 tonn
IV: 6 tonn

} Opprinnelig informasjon

Hvor mye mottar vi av hver kvalitet?

God: $0.5 \cdot 4 + 0.3 \cdot 5 + 0.25 \cdot 3 + 0.2 \cdot 6 = 5.45$

Middels: $0.3 \cdot 4 + 0.4 \cdot 5 + 0.4 \cdot 3 + 0.6 \cdot 6 = 8.0$

Brukbart: $0.2 \cdot 4 + 0.3 \cdot 5 + 0.35 \cdot 3 + 0.2 \cdot 6 = 4.35$

} transformert informasjon

I vårt språk: Opprinnelig info: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Transf. info $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5.45 \\ 8.0 \\ 4.35 \end{pmatrix}$

Gjennomsnittene: $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.25 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.35 & 0.2 \end{bmatrix}$

Oppgaven: Skalarprodukt av hver linje i matrisen med vektoren $\vec{v}$.

Definition: Produkten av en matris

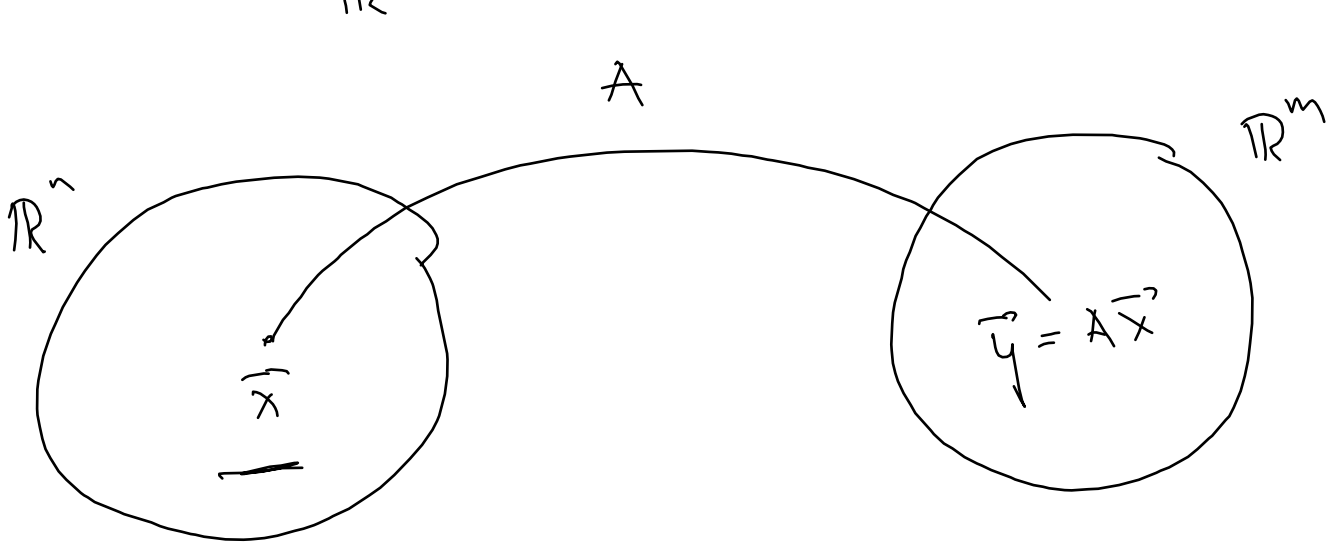
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

och en vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ är definierad som

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$m \times n$-matrisen

Mönster: $\vec{y} = A\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$



E

$$A = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 1\cdot(-4) + (-2)\cdot 3 \\ 0\cdot 2 + 4(-4) + 1\cdot 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 6 - 4 - 6 \\ 0 - 16 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Alternativ formulering: $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$ (kolonner) $\qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$A\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n$$

Exempel på nytt: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$A\vec{x} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -13 \end{bmatrix}$$