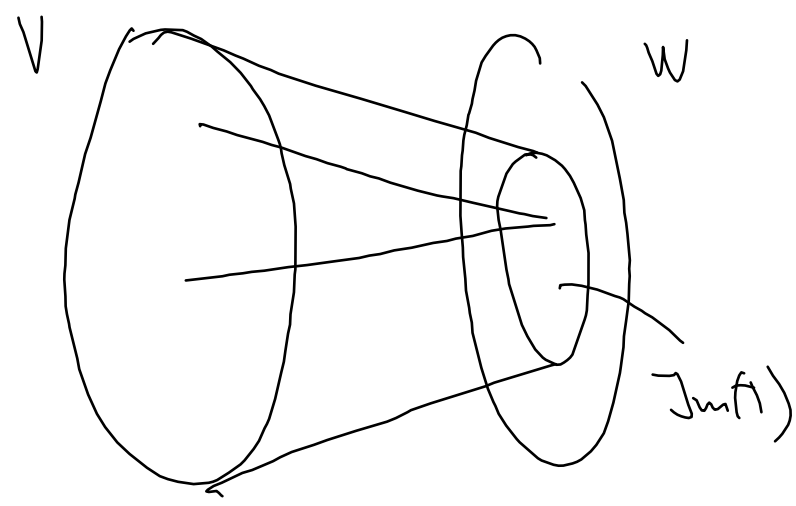
$\vec{u} \in N(T)$ $\quad T(a\vec{u}) = aT(\vec{u}) = a\cdot\vec{0} = \vec{0}$, så $a\vec{u} \in N(T)$.

$T\vec{v}_2$

Bildet til T:

$$Im(T) = \{T\vec{u} : \vec{u} \in V\} \subseteq W$$



Setning: $Im(T)$ er et underrom av W.

Bevis: Anta $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in Im(T)$. Må vise at

$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in Im(T)$. Det finnes $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ slik at $\vec{w}_1 = T\vec{v}_1$ og $\vec{w}_2 = T\vec{v}_2$

$= T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in Im(T)$

Tilsvarende er $T(a\vec{v}_1) = aT(\vec{v}_1) = a\vec{w}_1$, så $Im(T)$ er lukket under multiplikasjon med skalar.

Teorem: Anta at $T: V \to W$ er en lineæravbildning fra et endeligdimensjonalt vektorrom V. Da

$$\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(V)$$

$\dim(N(T)) = m$, $\dim(Im(T)) = k$, $\dim(V) = m + k$

Bevisskisse: La $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ være en basis for $N(T) \subseteq V$.

Utvid dette til en basis for hele rommet:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$$

Da viser det seg at $T(\vec{w}_1), T(\vec{w}_2), \ldots, T(\vec{w}_k)$ er en basis for $Im(T)$.

$m = \dim(N(T))$, $k = \dim Im(T)$, $m + k = \dim V$

Eksempel: $V_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\}$

$D: V_n \to V_n$ $\quad N(D) =$ alle konstanter.

$$\dim N(D) = 1$$

$Im(D) = V_{n-1}$, $\dim(V_{n-1}) = n$.

$$\dim(V_n) = n + 1$$

Egenverdier og egenvektorer

$T: V \to V$ lineær avbildning.

$\vec{v} \in V$ er en egenvektor for T dersom $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ for en $\lambda \in \mathbb{R}$. λ kalles egenverdien til $\vec{v}$.

Setning: Anta at $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier. Da er $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ lineært uavhengige.

Korollar: Dersom $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier i $\mathbb{R}^n$, så er $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ en basis.

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, finn egenverdier og egenvektorer.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot (-1)$$

$$= -2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$= (\lambda - 1)^2 \quad \text{Én egenverdi}$$

$\ldots\ldots$ $\lambda = 1$

Finner egenvektorene:

$$(A - 1 \cdot I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \left.\begin{matrix} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}\right\} \; x = y$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I dette tilfellet finnes det ikke noen basis av egenvektorer.

Spektralteoremet: Hvis A er en symmetrisk $n \times n$-matrise, så finnes det en ortonormal basis av egenvektorer.

(ortonormal $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$.