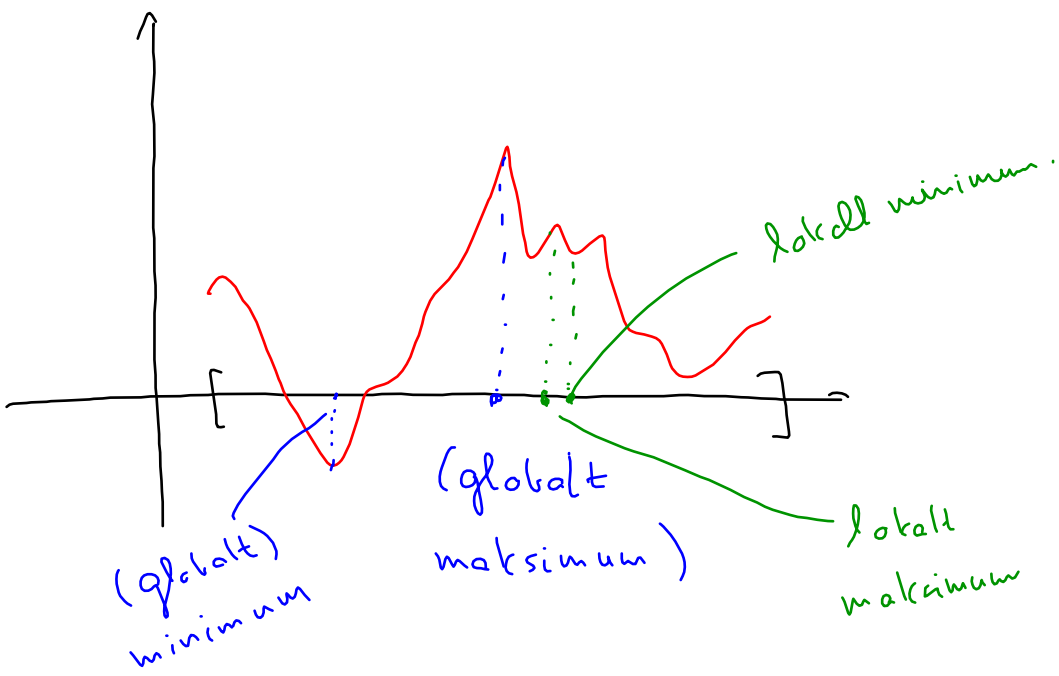
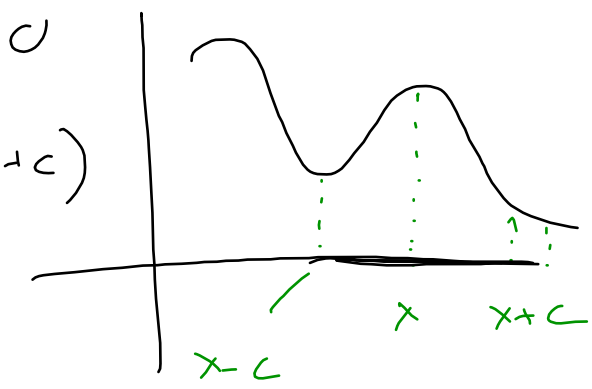
Ekstremalpunkter



Strategi: Finn først alle lokale maks og min-punkter, og finn deretter de globale punktene ved å sammenligne verdiene.

Definisjonen: x er et (globalt) maksimumspunkt for f på $[a,b]$ dersom $f(x) \geq f(u)$ for alle $u \in [a,b]$. Tilsvarende er x et (globalt) minimumspunkt for f på $[a,b]$ dersom $f(x) \leq f(u)$ for alle $u \in [a,b]$.

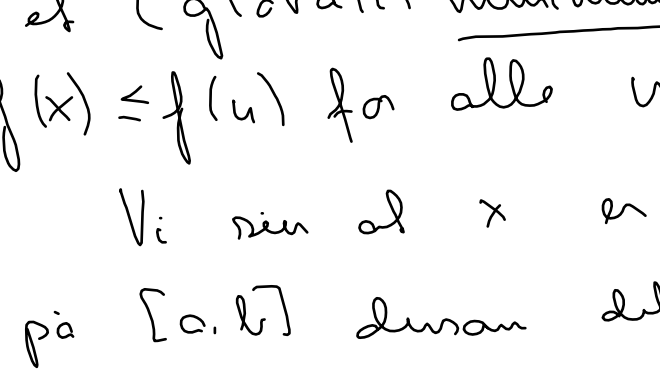
Vi sier at x er et lokalt maksimumspunkt for f på $[a,b]$ dersom det finnes en $c > 0$ slik at $f(x) \geq f(u)$ for alle $u \in (x-c, x+c)$ som er med i $[a,b]$. (Tilsvarende for lokalt minimum).

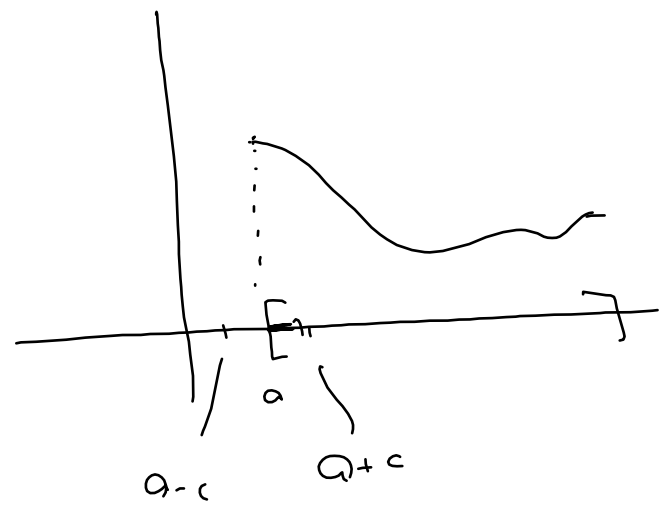


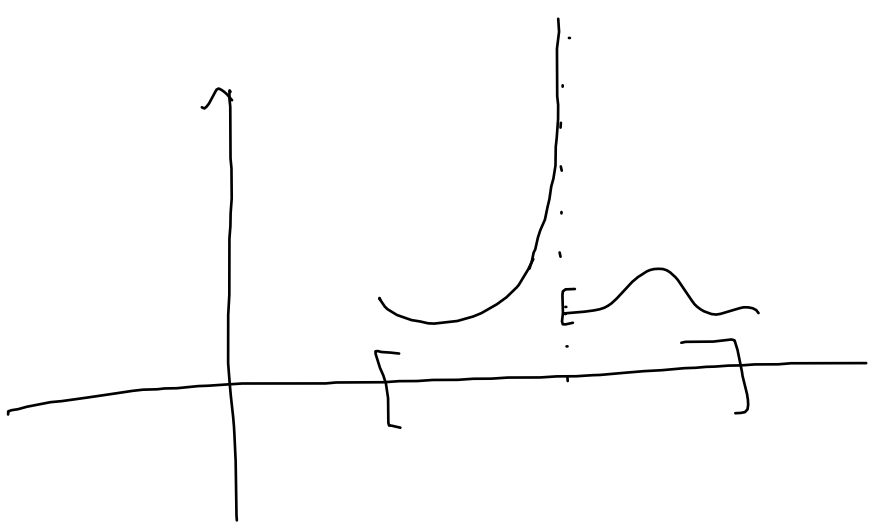
Finnes det alltid ekstremalverdier?

Nei:

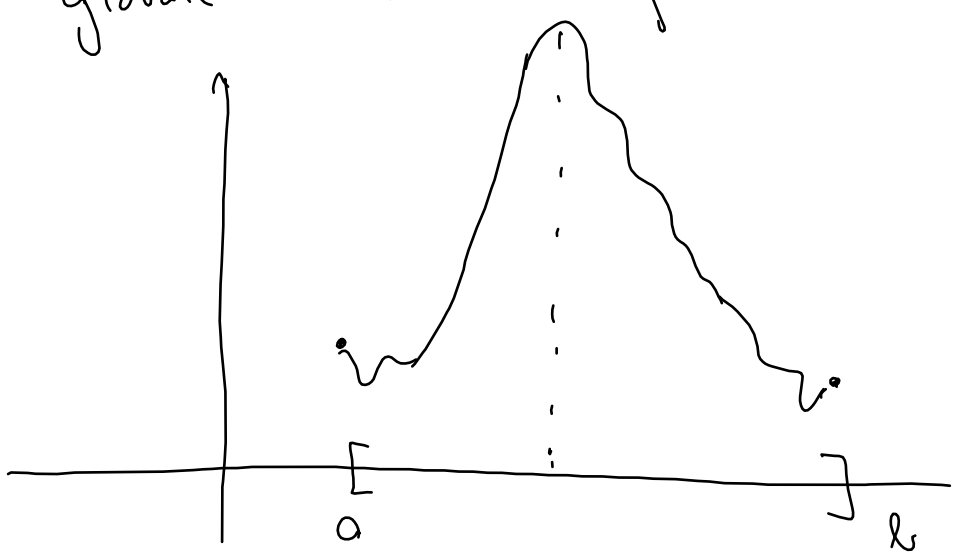
$f(x) = \frac{1}{x}$ på $(0,1)$



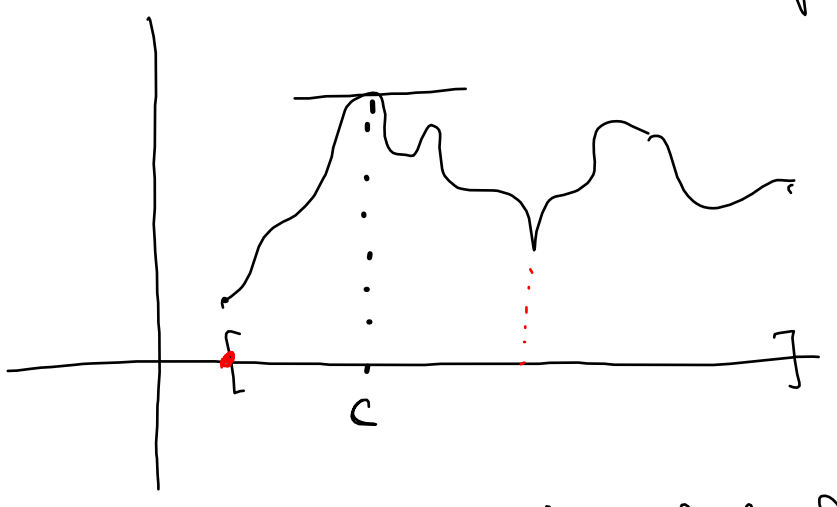


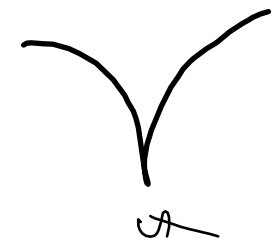


Ekstremalverdisetning: Dersom $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall, så har f globale maksimums- og minimumspunkter.



Hvor kan en funksjon $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ha et maks- eller min-punkt?





De kritiske punktene til f er:

(i) Punkter der den deriverte er 0.

(ii) Punkter der den deriverte ikke eksisterer.

(iii) Endepunktene til intervallet.

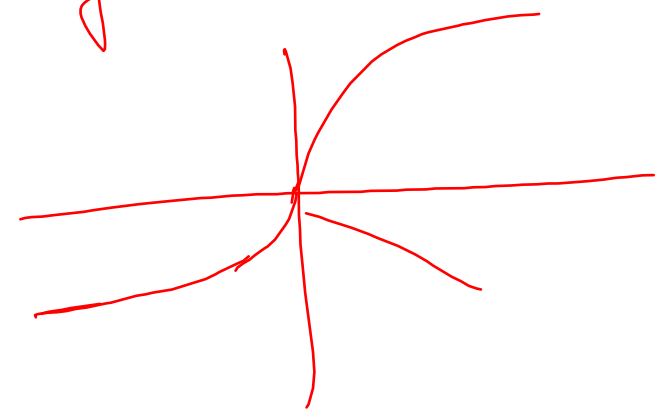
Setning: En kontinuerlig funksjon kan bare ha et lokalt maks eller min. punkt i et kritisk punkt.

OBS: Et kritisk punkt behöver ikke vare et lokalt maks. eller min. punkt.

Eksempel: $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$



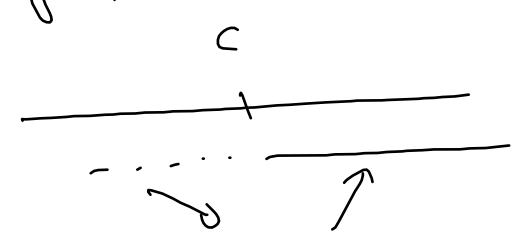
$f(x)=x^{1/3}$



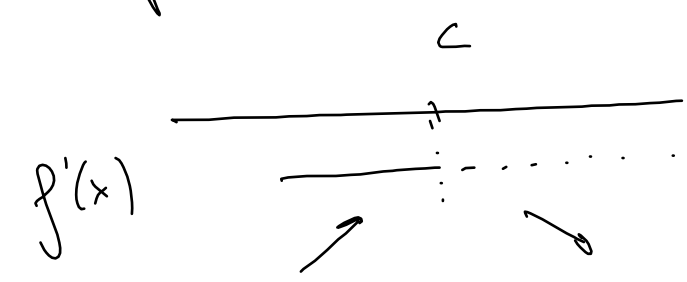
ikke vendepunkt

Setning: Anta at c er et indre kritisk punkt. Da har vi

(i) Hvis $f'(x)$ er negativ til venstre for c og positiv til höyre, så er c et lokalt minimumspunkt



(ii) Hvis $f'(x)$ er positiv til venstre for c og negativ til höyre, da er c et lokalt maksimumspunkt

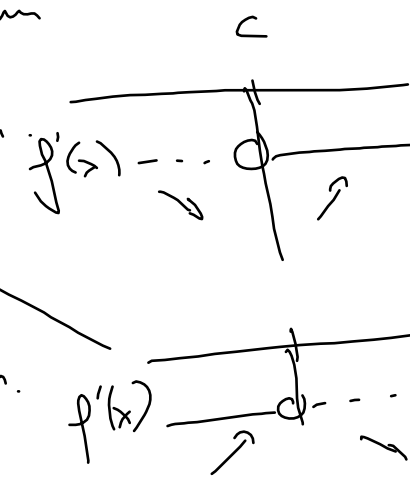


Annenderivasttesten: Anta at $f'(c)=0$. Deretter

(i) $f''(c)>0$, da er c et lokalt minimum.

(ii) $f''(c)<0$, da er c et lokalt maksimum.

(iii) $f''(c)=0$, da gir testen ingen konklusjon.



Eksempel: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$ på $[-2, 3]$

Finn maks.- og min.-punkter.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

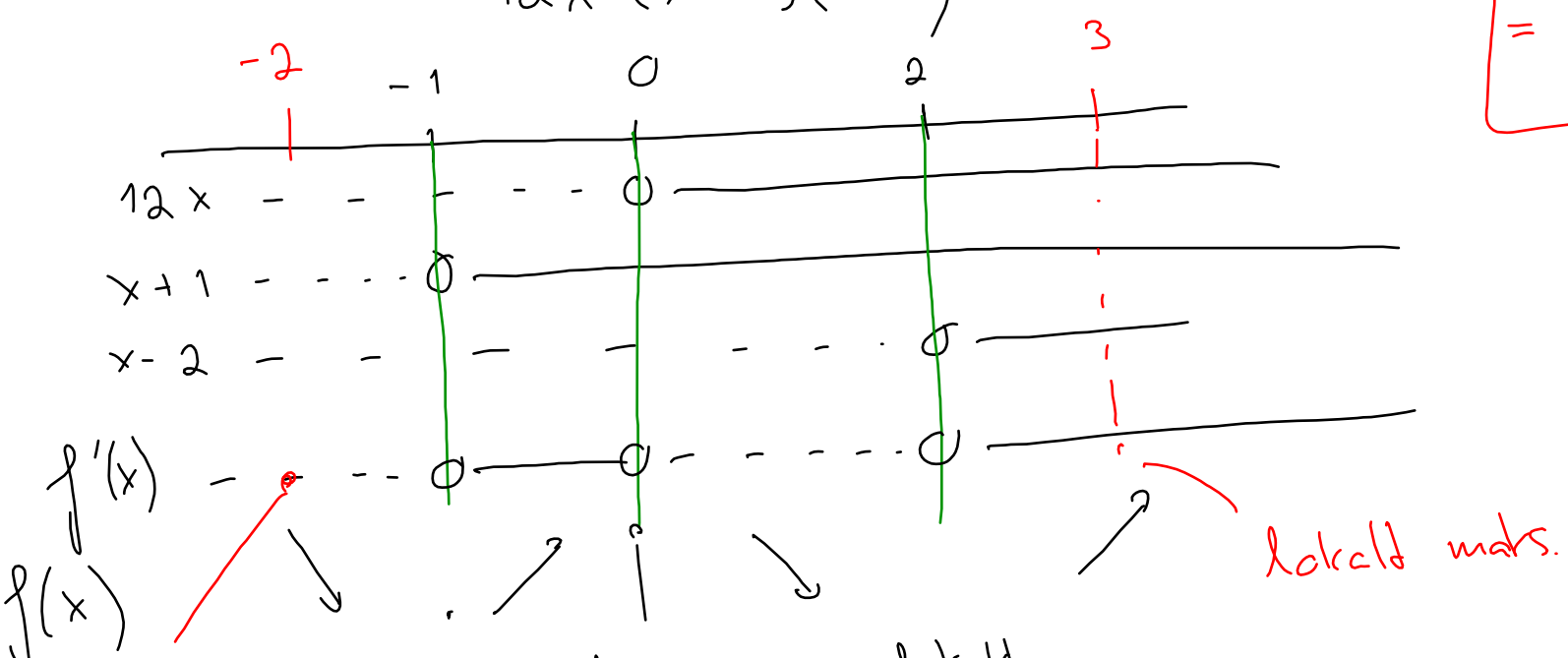
$$= 12x(x+1)(x-2)$$

Faktoriserer $x^2 - x - 2$:

Nullpunkter:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$



Oppsummering: kritiske punkter

lokale maks: $-2, 0, 3$

lokale min: $-1, 2$

Verdier: $f(-2) = 35$, $f(0) = 3$, $f(3) = 30$

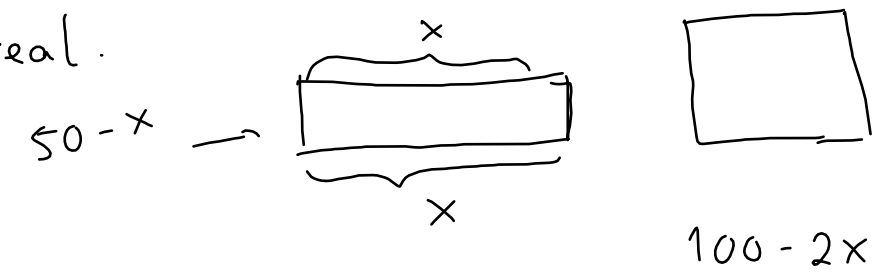
$f(-1) = -2$, $f(2) = -29$

maks.

min.

Uoppstilte oppgaver

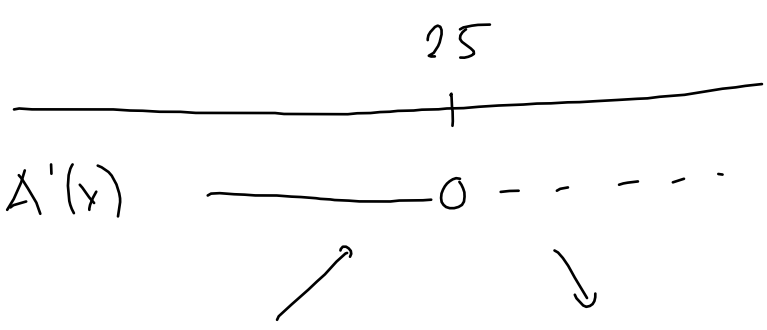
Eksempel: 100 meter gjerde, vil lage en rektangulær innhegning med størst mulig areal.



$$\frac{100-2x}{2} = 50-x$$

$$A(x) = x(50-x) = 50x - x^2, \quad 0 < x < 50$$

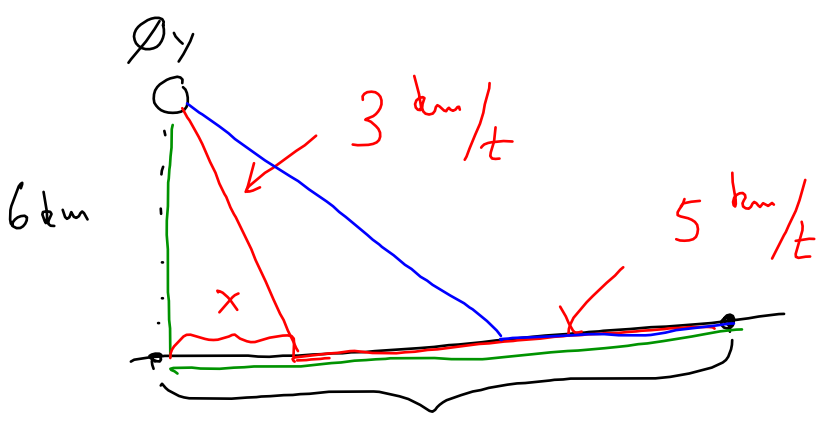
$$A'(x) = 50 - 2x, \quad A'(x) = 0: \quad 50 - 2x = 0 \Rightarrow \underline{x = 25}$$



Maksimumspunkt: $x = 25$

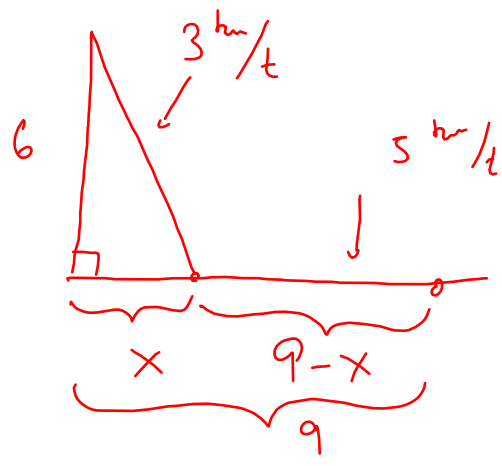
Størst areal får vi når innhegningen er et kvadrat.

Eksempel:



Hvordan kvake kortest mulig tid.

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$$



Tid på svømming: $t_s = \dfrac{\sqrt{6^2 + x^2}}{3}$

Tid på gåing: $t_g = \dfrac{9-x}{5}$

Total tid

$$t(x) = t_s + t_g = \frac{1}{3}\sqrt{36+x^2} + \frac{1}{5}(9-x)$$

Deriverer:

$$t'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{36+x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{5}(-1) = \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{5}$$

Nullpunkter: $t'(x) = 0$:

$$\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{36+x^2}} = \frac{1}{5} \quad | \cdot 15\sqrt{36+x^2}$$

$$5x = 3\sqrt{36+x^2}$$

Kvadrerer:

$$25x^2 = 9(36+x^2)$$

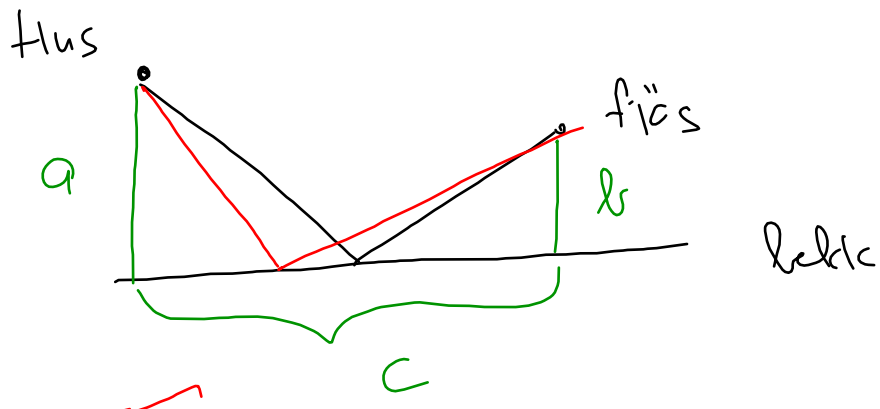
$$16x^2 = 9 \cdot 36$$

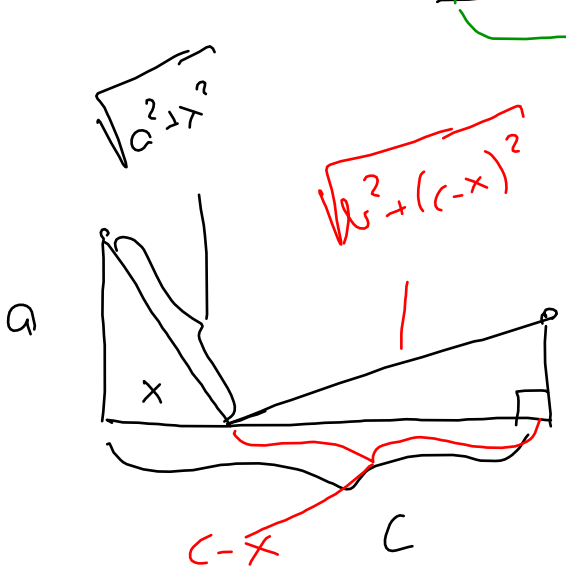
$$x^2 = \frac{9 \cdot 36}{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9 \cdot 36}{16}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{3^2 \cdot 6^2}{4^2}} = \pm\frac{3 \cdot 6}{4} = \pm\frac{9}{2}$$

$$\underline{x = \frac{9}{2}}$$

Eksempel: Eivind





Lengde:

$$l(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}$$

Deriverer:

$$l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} 2(c-x)(-1)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

Finner nullpunkt: $l'(x) = 0$:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} \quad \left| \cdot \sqrt{a^2+x^2}\sqrt{b^2+(c-x)^2} \right.$$

$$x\sqrt{b^2+(c-x)^2} = (c-x)\sqrt{a^2+x^2}$$

Kvadrerer:

$$x^2(b^2+(c-x)^2) = (c-x)^2(a^2+x^2)$$

$$x^2b^2 + x^2(c-x)^2 = (c-x)^2a^2 + (c-x)^2x^2$$

$$x^2b^2 = (c^2 - 2cx + x^2)a^2$$

$$0 = a^2c^2 - 2a^2cx + (a^2-b^2)x^2$$

dvs

$$(a^2-b^2)x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = 0$$

$$x = \frac{2a^2c \pm \sqrt{(2a^2c)^2 - 4(a^2-b^2)a^2c^2}}{2(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{2a^2c \pm \sqrt{4a^4c^2 - 4a^4c^2 + 4a^2b^2c^2}}{2(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{2a^2c \pm 2abc}{2(a^2-b^2)} = \frac{ac(a\pm b)}{(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{ac}{(a\pm b)} = \frac{ac}{(a+b)}$$

Forkaster minus av geometriske grunner.

Anta $a \neq b$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

