Spektralteoremet

Teorem Hvis A er en symmetrisk $n \times n$-matrise A, så finnes det en ortonormal basis av egenvektorer.

$$\vec{v}_i^{\,T} \vec{v}_j = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

Fordeler ved ortonormale basiser:

(i) $$\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v} = b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + \cdots + b_n \vec{v}_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \vec{v}_j$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_n \vec{v}_n) \cdot (b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + \cdots + b_n \vec{v}_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (a_i \vec{v}_i) \cdot (b_j \vec{v}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \underbrace{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j}_{\text{"0 omtalt } i \neq j\text{"}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \underbrace{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}_{1} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

(ii) Gitt en vektor $\vec{v}$ vet vi at det finnes tall $c_1, \ldots, c_n$ slik at

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \cdots + c_n \vec{v}_n$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle = c_1 \underbrace{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_i \rangle}_{\text{"0"}} + \cdots + c_i \underbrace{\langle \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \rangle}_{1} + \cdots + c_n \underbrace{\langle \vec{v}_n, \vec{v}_i \rangle}_{\text{"0"}} = c_i$$

Altså $c_i = \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle$

Kvadratiska former

En kvadratisk form är en funktion av flera variabler som är en summa av kvadratiska led.

Exempel 1: $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$

Exempel 2 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$

Vi kan alltid skriva en sådan kvadratisk form som $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ för en symmetrisk matris.

Exempel 1: $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi får

$$\vec{x}^T A \vec{x} = [x,y] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x,y] \begin{bmatrix} 3x+y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$= 3x^2 + xy + xy + y^2 = 3x^2 + 2xy + y^2$$

Generellt mönster: $f(x,y) = ax^2 + bxy + cx^2$

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

Exempel 2: $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Skiss: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\vec{x}^T A \vec{x} = [x,y,z] \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= [x,y,z] \begin{bmatrix} x + \frac{3}{2}y + 2z \\ \frac{3}{2}x + 2y + z \\ 2x + y + 2z \end{bmatrix} =$$

$$x^2 + \frac{3}{2}xy + 2xz + \frac{3}{2}xy + 2y^2 + yz + 2xz + yz + 2z^2$$

$$= x^2 + 3xy + 4xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$$

$$= f(x,y,z)$$

Alle kvadratiske former kan skrives som

$f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$. der A er en symmetrisk matrise.

...

Ved spektralteoremet har A en ortonormal basis av egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Enhver vektor kan derfor skrives

$$\vec{x} = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \vec{v}_n$$

Ganger med A

$$A\vec{x} = y_1 A\vec{v}_1 + y_2 A\vec{v}_2 + \dots + y_n A\vec{v}_n$$

$$= y_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + y_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \lambda_n \vec{v}_n$$

Da er

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x} = \vec{x} \cdot (A\vec{x})$$

$$= (y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \vec{v}_n) \cdot (y_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + y_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \lambda_n \vec{v}_n)$$

$$= y_1^2 \lambda_1 + y_2^2 \lambda_2 + \dots + y_n^2 \lambda_n$$

Teorem: Anta at $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$ der A er en symmetrisk matrise.

(i) Hvis alle egenverdiene til A er (strengt) positive, så er $\vec{0}$ det eneste minimumspunktet til f. I dette tilfellet kalles f/A positiv definitt.

(ii) Hvis alle egenverdiene er strengt negative, så er $\vec{0}$ det eneste maksimumspunktet til f. I så fall kalles f/A negativ definitt.

(iii) Hvis A har egenverdier med ulikt fortegn, så er $\vec{0}$ et sadelpunkt.

(iv) Dersom noen egenverdier er 0 og de andre har samme fortegn, så er $\vec{0}$ fortsatt et maks. eller min, men det er ikke lenger det eneste maks eller min. punktet. I dette tilfellet kalles f/A for semidefinitt.

Eksempel Avgjør om $f(x,y) = 5x^2 - 4xy + 5y^2$ er positiv definitt.

Matrisen er $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

Finner egenverdiene

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - (-2)(-2)$$

$$= (\lambda - 5)^2 - 4$$

dvs $(\lambda - 5)^2 = 4 \Rightarrow \lambda - 5 = \pm 2 \Rightarrow \lambda = 5 \pm 2 = \begin{cases} 7 \\ 3 \end{cases}$

$\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 3$ er begge positive, så f/A er positiv definitt.

Eksempel: $f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Finner egenverdier:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4$$

$$= \cancel{4} - 4\lambda = \lambda + \lambda^2 - \cancel{4}$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda = \underline{\lambda(\lambda - 5)}$$

To egenverdier $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

Matrisen / formen er positiv semidefinitt siden en egenverdi er null mens resten er positive.

Annenderivatetesten og egenverdier

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Hesse-matrisen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Siden de blandede partiellderivate er like, så er denne matrisen symmetrisk.

Annenderivatetesten: Anta at $\vec{a}$ er et stasjonært punkt for f (dvs $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0$ for alle i). Lar vi $Hf(\vec{a})$ være Hesse-matrisen i $\vec{a}$, har vi:

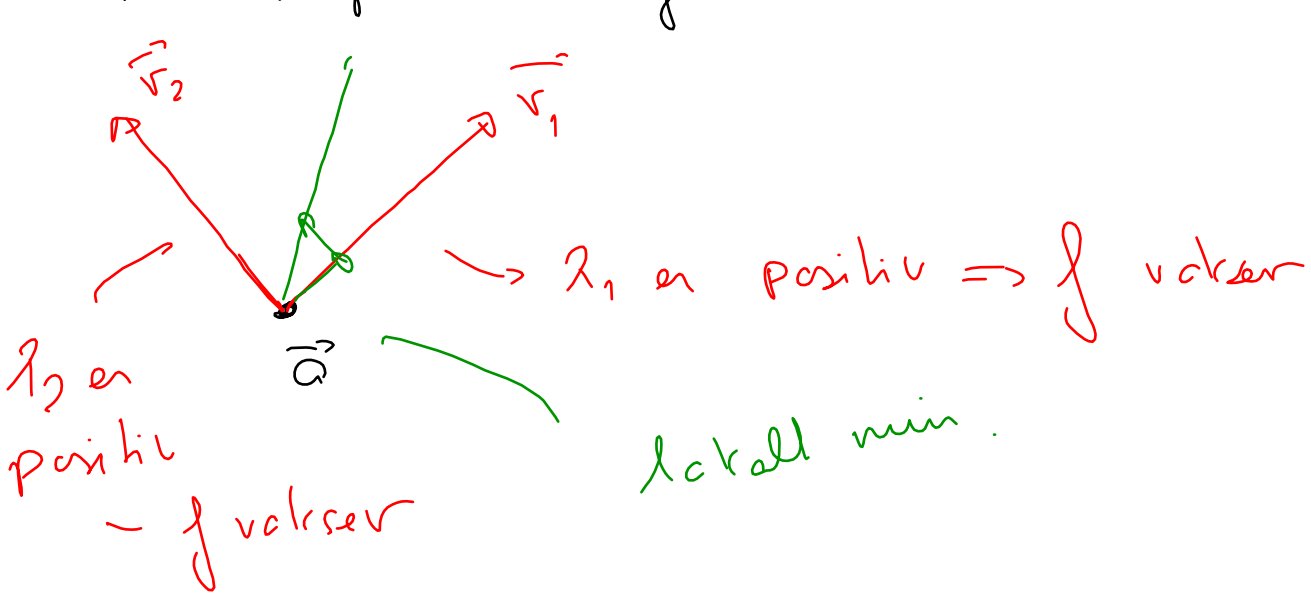
(i) Hvis alle egenverdiene til $Hf(\vec{a})$ er strengt positive, så er $\vec{a}$ et lokalt minimum.

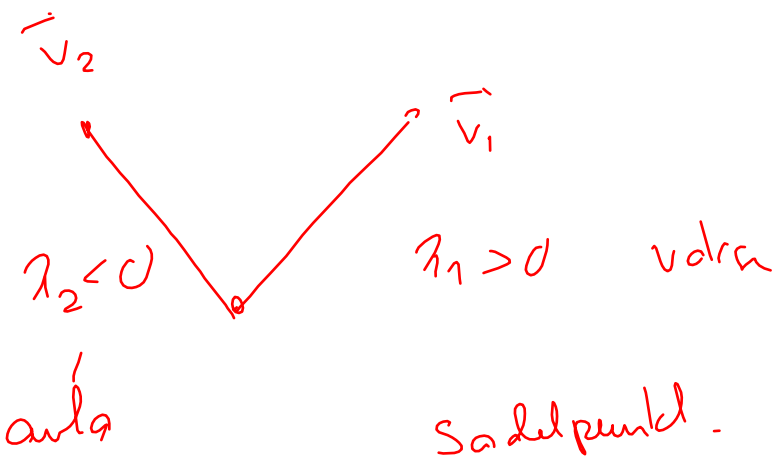
(ii) ——— " ——— strengt negative, så er $\vec{a}$ et lokalt maksimum.

(iii) Hvis det finnes både positive og negative egenverdier, så er $\vec{a}$ et sadelpunkt.

(iv) Hvis noen egenverdier er null og alle de andre har samme fortegn, så gir testen ingen konklusjon.

Hva betyr dette geometrisk:





Sammenheng med tidligere annenderivatetest.

Hesse-determinanten:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

$$= AC - B^2 = Hf(\vec{c})$$

(i) $Hf(\vec{a}) < 0$, så sadelpunkt

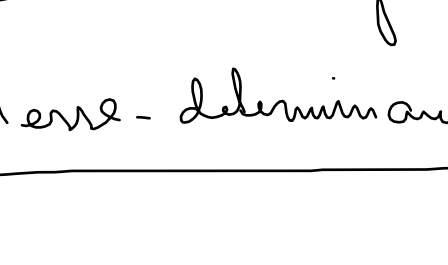
$Hf(\vec{a}) > 0$, så lokalt min hvis $A > 0$

lokalt maks hvis $A < 0$.

Sammenheng: $Hf(\vec{a}) = \lambda_1(a)\lambda_2(a)$ <

Hvis egenverdiene har motsatt fortegn, så $Hf(a) < 0$.

Hvis egenverdiene har samme fortegn, så $Hf(a) > 0$.



5.1 - 5.2 deklud 5.5

5.3 - 5.4