Oppsummering

Teorem: Anta at A er en $n \times n$-matrise. Da er følgende ekvivalent

(i) A er inverterbar

(ii) $\det(A) \neq 0$

(iii) Ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

(iv) Søylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$

(v) Radene i A ——— " ———

(vi) Rangen til A er n.

Viser at (iii) og (iv) er ekvivalente:

(iv) betyr at det finnes (for hver $\vec{b}$) nøyaktig ett sett med tall $x_1, \dots, x_n$ slik at

$$\underbrace{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \longrightarrow \text{(iii)}$$

der $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Eksempel: Undersøk om $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Det er nok å undersøke om $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Regner ut:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)\right) + 2\left(0 \cdot 1 - (-2)(-1)\right) + 1\left(0 \cdot 0 - (-2) \cdot 1\right)$$

$$= -1 - 4 + 2 = -3 \neq 0$$

Dette betyr at $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ danner en basis.

Lineæravbildning

Definisjon: Anta at V og W er to lineære rom. En funksjon $T: V \to W$ kalles en lineæravbildning dersom

$$T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v}) \quad \text{for alle } \vec{u}, \vec{v} \in V \text{ og alle } a, b \in \mathbb{R}$$

Observasjon: Vi har også

$$T(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n) = a_1T(\vec{u}_1) + a_2T(\vec{u}_2) + \cdots + a_nT(\vec{u}_n)$$

for

$$T(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n) = T(a_1\vec{u}) + T(a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n)$$

$$= a_1T(\vec{u}_1) + T(a_2\vec{u}_2) + T(a_3\vec{u}_3 + \cdots + a_n\vec{u}_n)$$

$$= a_1T(\vec{u}_1) + a_2T(\vec{u}_2) + T(a_3\vec{u}_3 + \cdots + a_n\vec{u}_n) \quad \text{osv.}$$

Ny observasjon: $T(\vec{0}) = \vec{0}$ for $0\vec{x} = \vec{0}$ for alle $\vec{x}$

$$T(\vec{0}) = T(0\vec{0}) = 0T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Eksempel: Anta at A er en $m \times n$-matrise. Definerer

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ved

$$T(\vec{u}) = A\vec{u}$$

Dette er en lineæravbildning for

$$T(a\vec{u} + b\vec{v}) = A(a\vec{u} + b\vec{v}) = aA\vec{u} + bA\vec{v} = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$$

Eksempel: $V = \{\underbrace{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}_{p(x)} : a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\}$

$T: V \to V$

$Tp = p'$ er en lineæravbildning.

$$T(ap + bq) = (ap + bq)' = ap' + bq' = aT(p) + bT(q)$$

Teorem: Anta att $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning. Då är

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} \quad \text{för alla } \vec{u}$$

där A är matrisen $\underbrace{[T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), \dots, T(\vec{e}_n)]}_{\text{sägs vara } A}$.

Bevis Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \dots + u_n\vec{e}_n$ Då är

$$T\vec{u} = T(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \dots + u_n\vec{e}_n) = u_1T(\vec{e}_1) + u_2T(\vec{e}_2) + \dots + u_nT(\vec{e}_n)$$

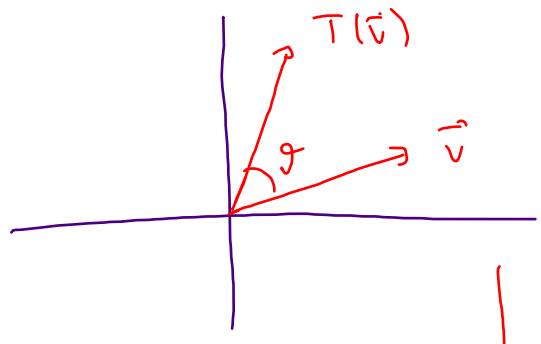
$$= [T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), \dots, T(\vec{e}_n)] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

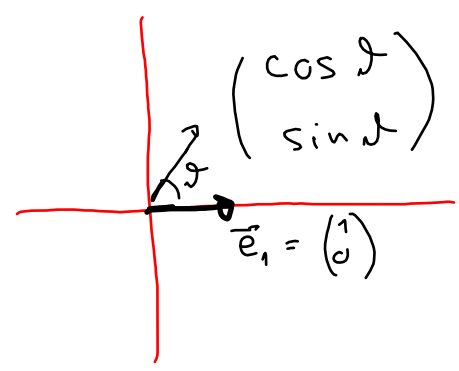
$$= A\vec{u}$$

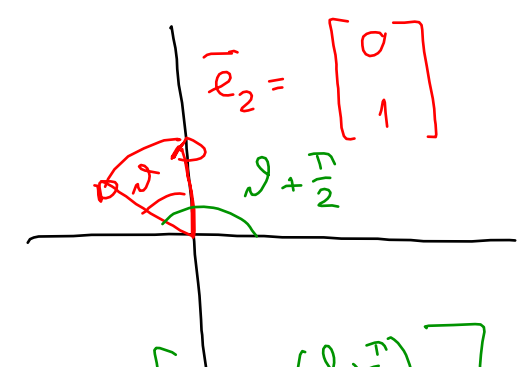
Exempel: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\vec{v})$ är vektorn man får om man vrider $\vec{v}$ en vinkel ϑ i positiv riktning.

T är en linjäravbildning (sjukt dåligt!)

Finn matrisen till T?







$$A = [T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\vartheta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\cos(\vartheta + \tfrac{\pi}{2}) = \cos\vartheta \underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0} - \sin\vartheta \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1} = -\sin\vartheta$$

$$\sin(\vartheta + \tfrac{\pi}{2}) = \sin\vartheta \underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0} + \cos\vartheta \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1} = \cos\vartheta$$

Hva får vi når vi dreier $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en vinkel $\frac{\pi}{6}$?

Matrisen er $A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$