# Matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

komponentvis

Hva skal $AB$ bety?

Forslag:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}b_{m1} & & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

Hadamard-produktet

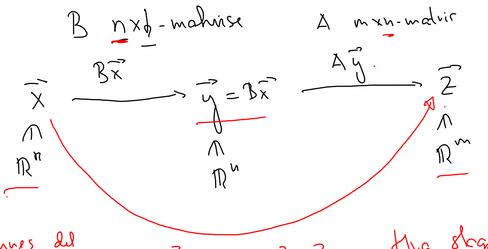
Ser på transformasjoner av vektorer:

$\vec{y} = A\vec{x}$, $A$ er $m \times n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

$\vec{y}$: transformert vektor

$\vec{x}$: opprinnelig vektor

Hva skjer med to operasjoner etter hverandre?



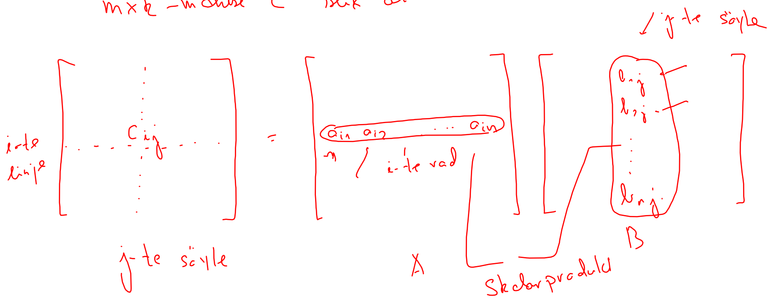

Finnes det en $C$ slik at $\vec{z} = C\vec{x}$ ?

Hva skal matrise $C$ være?

$C$ må være en $m \times k$-matrise

$$\vec{z} = C\vec{x} = A\vec{y} = A(B\vec{x}) \overset{?}{=} (AB)\vec{x}$$

**Definisjon:** Dersom $A$ er en $m \times n$-matrise og $B$ er en $n \times k$-matrise, så definerer vi produktet $AB$ til å være en $m \times k$-matrise $C$ slik at




$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

**Eksempel:** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$2\times 3$-matrise $3\times 2$

Like JA

Finnes $AB$?

Hva slags matrise er $AB$: $2\times 2$-matrise

$$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 + 3\cdot 0 & 2(-1) + (-1)4 + 3\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 4\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 4 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$6 - 2 + 0$

$3 + 0 + 0$

$-2 - 4 + 3$

$-1 + 0 + 4$

**Regneregler:** i) $A(BC) = (AB)C$

ii) $A(B+C) = AB + AC$

iii) $(A+B)C = AC + BC$

Hva med $AB = BA$? Er ikke dette en regel? NEI!

Hva skal til for at både $AB$ og $BA$ er definert

$A$ er $m\times n$, $B = k\times l$ matrise

$AB$ kan være definert når $n = k$ og da er $AB$ $m\times l$-matrise

$k\times l$ $m\times n$

$BA$ er kun definert når $l = m$ er like, og da er $BA$ en $k\times n$-matrise

Dette betyr at $AB$ og $BA$ kan kun være like når $m = n = k = l$.

Så $A$ og $B$ må være kvadratiske $n\times n$-matriser

$n\times n$ ganget med $n\times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} C = AB \\ D = BA \end{matrix}\right\} n\times n \text{ ganger.}$$

**Eksempel** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1) + 1\cdot 1 & 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) + 3\cdot 1 & 0\cdot 3 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$2\times 2$ $2\times 2$ !!

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 2 + 3\cdot 0 & (-1)\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Hvorfor spiller rekkefølgen en rolle?

$AB$ – operasjon $B$ først, deretter $A$

$BA$ – operasjon $A$ først, deretter $B$.

} rekkefølgen spiller en rolle.

---

Alternativ beskrivelse av $AB$. La $B = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k]$ ($\vec{b}_1$ = søylene i $B$)

Da

$$AB = [A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \ldots, A\vec{b}_k]$$

# Kvadratiske matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Identitetsmatriser:**

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1'ere på hoveddiagonalen, 0'er ellers.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Eksempel:** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$AI_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

**Generelt:** $AI_n = A$, $I_n A = A$ } i dette tilfellet.

$I_n \vec{x} = \vec{x}$

**Definisjon:** Anta at $A$ er en $n \times n$-matrise. Vi sier at $A$ er *invertérbar* dersom det finnes en $n \times n$-matrise $B$ slik at

$AB = I_n$ og $BA = I_n$,

og i så fall kalles $B$ en invers til $A$.

**Eksempel:** Undersøk om matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ er invertérbar.

Vi må undersøke om det finnes en matrise $B$

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$$

slik $AB = I_2$. Dette betyr at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2z & y+2u \\ -x+z & -y+u \end{bmatrix}$$

Får ligningen:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2u = 0 \\ -y + u = 1 \end{cases}$$

$x = z$ : $z + 2z = 1$

$z = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3}$

$y = -2u$ : $-(-2u) + u = 1$

$3u = 1$

$u = \frac{1}{3}$

$y = -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

Må sette $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, da $AB = I_2$

Hva med $BA = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1) & \frac{1}{3} \cdot 2 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}(-1) & \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

HURRA! $A$ er invertérbar og $B$ er en invers.

**Teorem:** Hvis $A, B$ er to $n \times n$-matriser slik at $AB = I_n$, så er $BA = I_n$.

**Exempel**: Undersök om $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ har en invers.

Sätt $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$, och se om vi kan få till $AB = I_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2z & y-2u \\ -2x+4z & -2y+4u \end{bmatrix}$$

Nå ha: $x - 2z = 1$ och $y - 2u = 0$

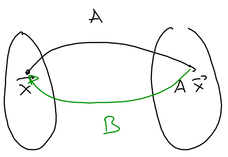
$(-2)$ $-2x + 4z = 0$

$-2x + 4z = -2$

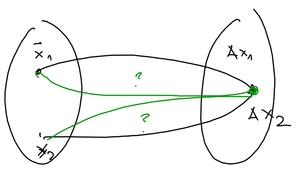
Ingen lösning.

$-2y + 4u = 1$

$A$ är ikke inverterbar!




Den inverse matrisen skal bringe oss tilbake igjen.




**Setning**: En $n \times n$-matrise $A$ har høyst én invers.

**Bevis**: Anta at både $B$ og $C$ er inverser til $A$, vi må vise at $B = C$.

$$B = B \cdot I_n = B(AC) = \underbrace{(BA)}_{I_n} C = I_n C = C.$$

**Definisjon**: Dersom $A$ er inverterbar, betegner vi den inverse med $A^{-1}$.

**Setning**: Dersom $A$ er inverterbar, da er $A^{-1}$ inverterbar og $(A^{-1})^{-1} = A$.

**Bevis**: For at $(A^{-1})^{-1} = A$, da må $A \cdot A^{-1} = I_n$, dette holder per definisjon.

**Teorem**: Hvis $A, B$ er inverterbare $n \times n$-matriser, da er $AB$ inverterbar og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

**Bevis**: Vi skjekk at $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. Det gjør den

$$(AB)\underbrace{(B^{-1}A^{-1})}_{C} = A(\underbrace{B(B^{-1}A^{-1})}) = A(\underbrace{(BB^{-1})}_{I_n}A^{-1})$$

$$= A(\underbrace{I_n A^{-1}}_{A^{-1}}) = AA^{-1} = I_n.$$