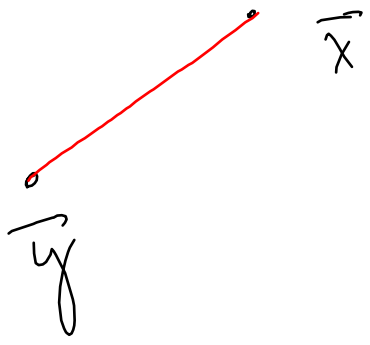
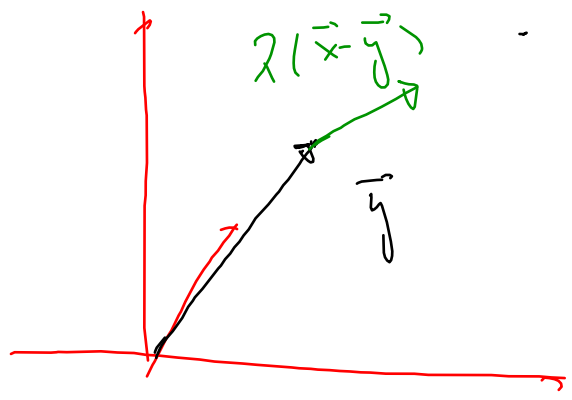
Konvekse mengder



Hvordan beskriver vi I_{xy}, linjestykket mellom $\vec{x}$ og $\vec{y}$?



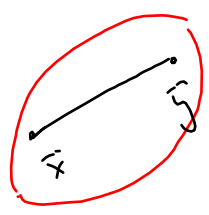
$0 \le \lambda \le 1$

$$\vec{y} + \lambda(\vec{x}-\vec{y})$$
$$= \vec{y} + \lambda\vec{x} - \lambda\vec{y}$$
$$= \lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y}$$

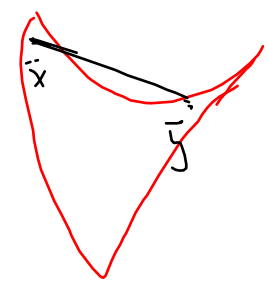
$$I_{xy} = \{ \lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} : 0 \le \lambda \le 1 \}$$

Intuitivt: En konveks mengde er en mengde som buler utover:

Konveks



ikke-konveks



Formell definisjon: En mengde $C \subseteq \mathbb{R}^n$ er konveks dersom man gang i valgte to punkter $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{C}$, så ligger hele I_{xy} i C. Med andre ord: Hvis $\vec{x}, \vec{y} \in C$, så er også

$$\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in C \quad \text{for alle } 0 \le \lambda \le 1.$$

Setning: En lukket kule

$$B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} : \| \vec{x} - \vec{a} \| \le r \}$$

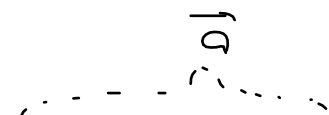
er konveks

Bevis: Anta at $\vec{x}, \vec{y} \in B(\vec{a}, \vec{r})$. Vi må vise at følgende punkt

$$\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in I_{xy}$$

ligger i $B(\vec{a}, \vec{r})$

Vi har

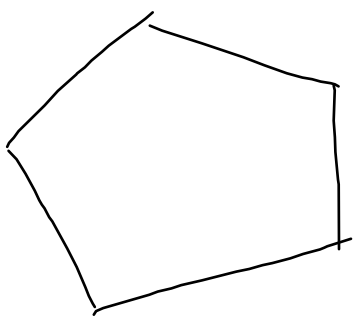


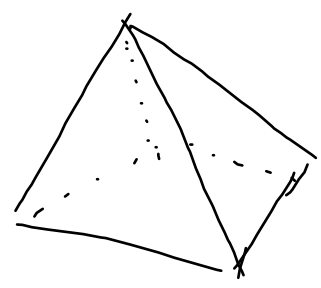
$$\| (\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y}) - \vec{a} \| = \| \lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} - (\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{a}) \|$$
$$\| \lambda(\vec{x} - \vec{a}) + (1-\lambda)(\vec{y} - \vec{a}) \|$$

trekant-ulikhet

$$\le \| \lambda(\vec{x}-\vec{a}) \| + \| (1-\lambda)(\vec{y}-\vec{a}) \|$$
$$\le \lambda \underbrace{\| \vec{x} - \vec{a} \|}_{\le r} + (1-\lambda) \underbrace{\| \vec{y} - \vec{a} \|}_{\le r}$$
$$\le \lambda r + (1-\lambda) r = r, \text{ altså } \lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in B(\vec{a}, r).$$

Polyedre



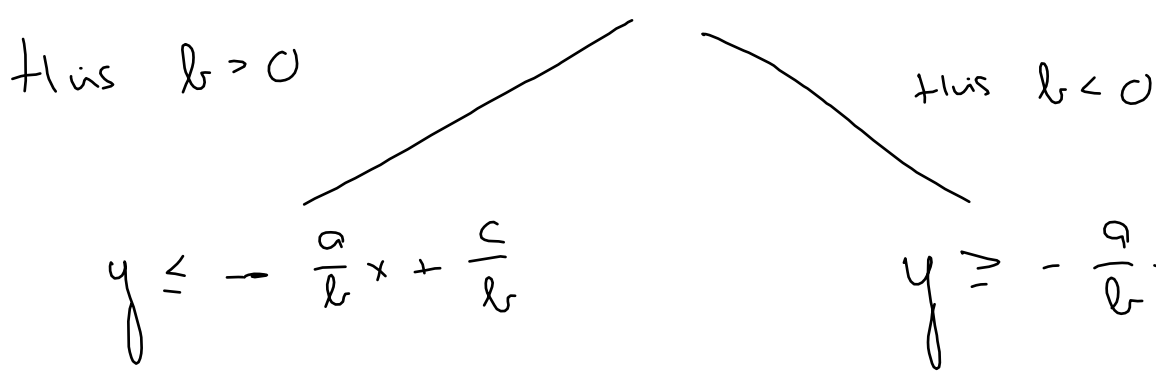


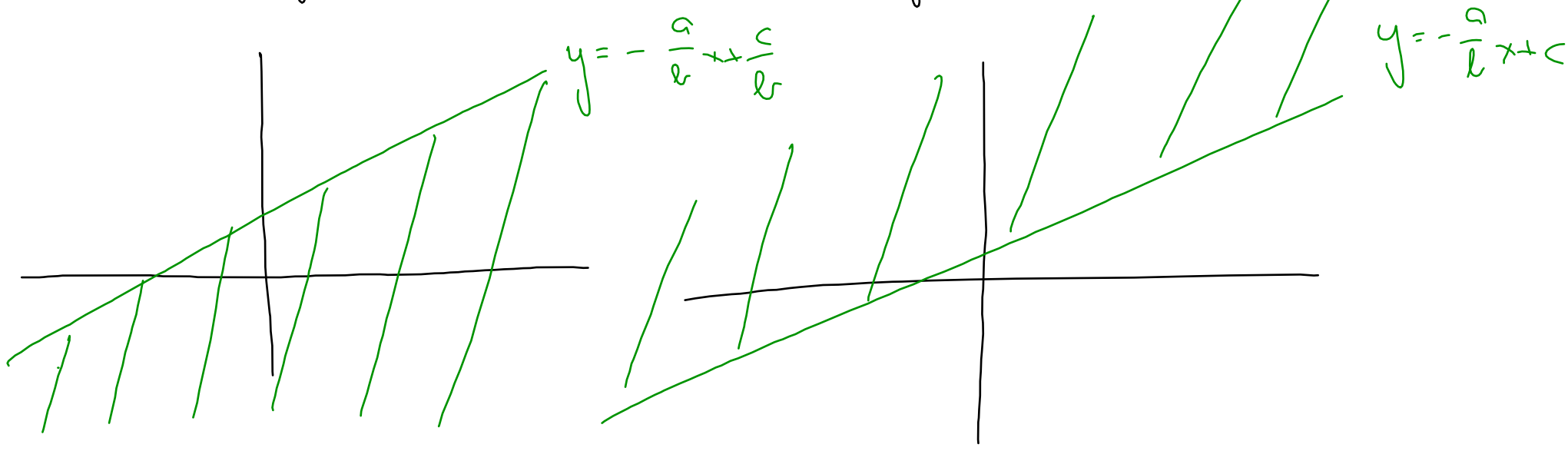
I planet Avgrenses av likninger $ax+by=c$ en vanlig linje

$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ forutsatt $b\neq 0$

Hva med en ulikhet $ax+by\leq c$?

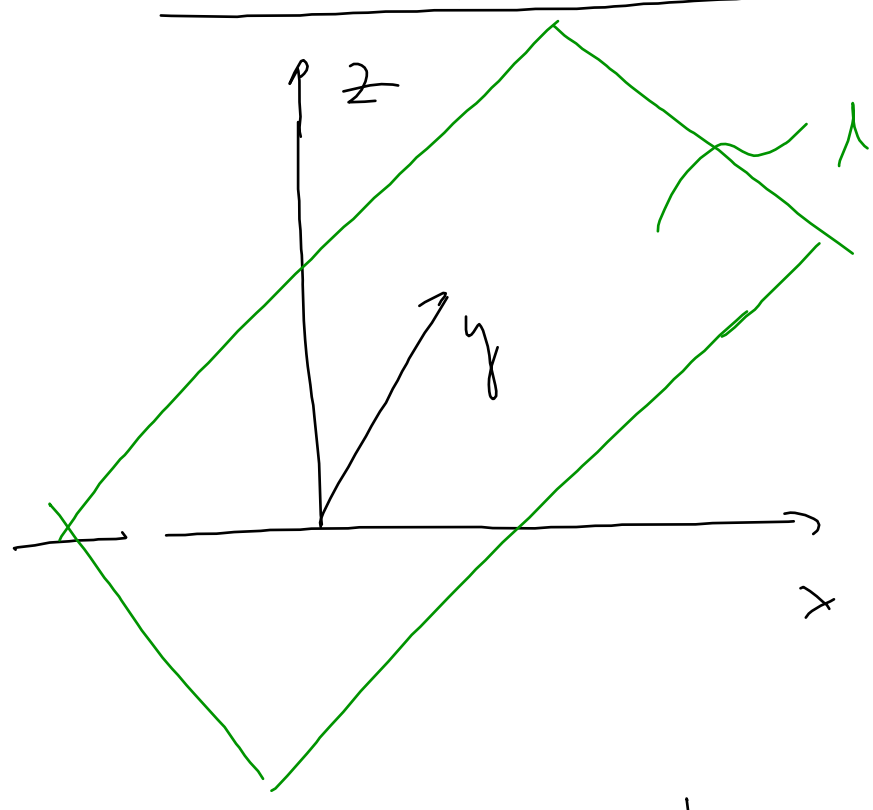
$by\leq -ax+c$





Mangler en ligningen til halvplan:

Hva skjer i rommet? $ax+by+cz=d$



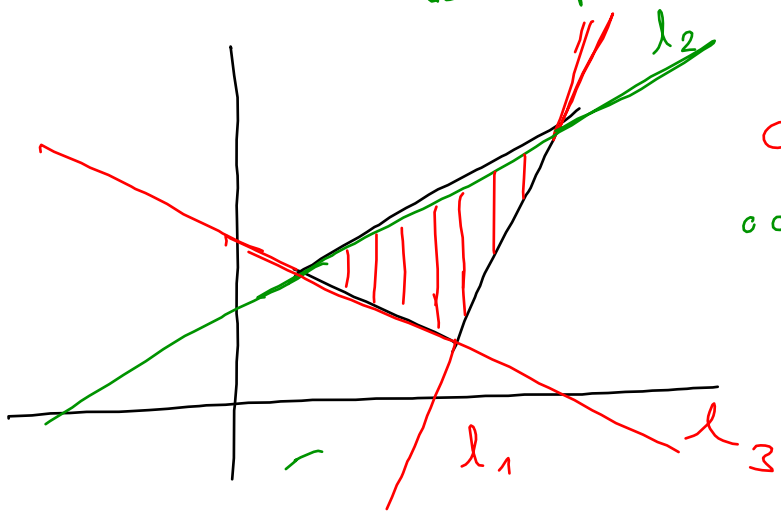
Løsningsmengden er et plan.

Hva med

$ax+by+cz\leq d$?

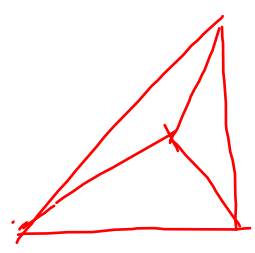
Ja, dette blir et halvrom, enten alle punkter under planet, eller alle punkter over.

I planet:



Avskår meg punkter over l_1
og — " — under l_2
og over l_3
kan beskrives ved 3 ulikheter.

Tilsvarende i rommet:



Tetraeder: kan beskrives med 4 ulikheter.

Abstrakt beskrivelse

La

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$$

Skriver: $A\vec{x} \le \vec{b}$

der $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Definisjon: Et polyeder i $\mathbb{R}^n$ er en mengde

$$P = \{\vec{x} : A\vec{x} \le \vec{b}\}$$

for en gitt matrise A og en gitt vektor $\vec{b}$.

Teorem: Et polyeder er en konveks mengde

Bevis: Anta at $\vec{x}, \vec{y} \in P$. Må vise at

$$\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in P \text{ for alle } 0 \le \lambda \le 1.$$

Vi har

$$A(\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + (1-\lambda)A\vec{y}$$
$$\le \lambda\vec{b} + (1-\lambda)\vec{b} = \vec{b}, \text{ så } \lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in P.$$

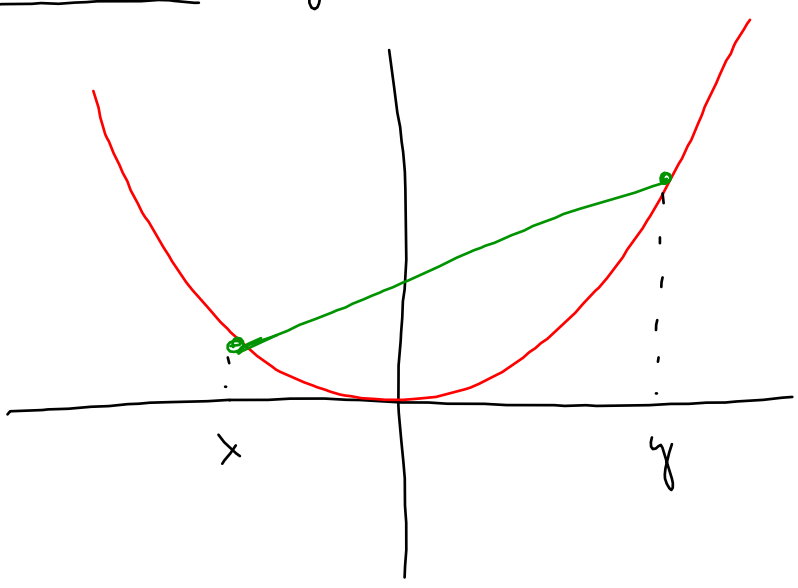
Lineær optimering/programmering: Finn maksimum/minimum til en lineær funksjon

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

over et polyeder $P = \{\vec{x} : A\vec{x} \le \vec{b}\}$.

Konvekse funksjoner

Intuitivt: Generaliseringer av funksjoner som krummer opp



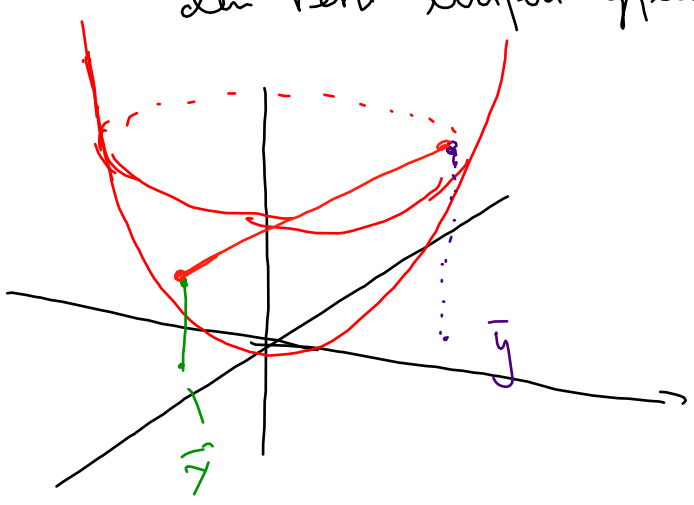
$f''(x) \geq 0$ alle x $\Rightarrow$ krummer opp

Formell definisjon: Anta at $C \subseteq \mathbb{R}^n$ er konveks. En funksjon

$f: C \to \mathbb{R}$ heter konveks dersom linjestykket i verdiområdet til to punkter $\vec{x}, \vec{y} \in C$, dvs

$$f(\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y}) \leq \lambda f(\vec{x}) + (1-\lambda) f(\vec{y}) \text{ for alle } \lambda,\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

(dvs at et punkt på linjestykket fra $\vec{x}$ til $\vec{y}$ ligger under den rette linjen gjennom $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ og $(\vec{y}, f(\vec{y}))$.



Jensens ulikhet: Anta at $f: C \to \mathbb{R}$ er konveks og at $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in C$. Dersom $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er positive tall slik at $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, da gjelder

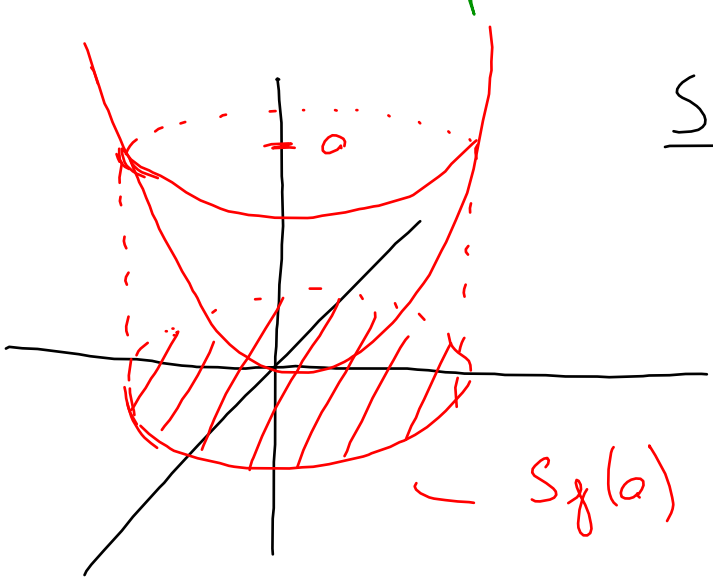
$$f(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n) \leq \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2) + \cdots + \lambda_n f(\vec{x}_n)$$

f i tyngdepunktet til $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$

tyngdepunktet til $f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \ldots, f(\vec{x}_n)$

Subnivåmengder:

$$S_f(a) = \{\vec{x} \in C : f(\vec{x}) \leq a\}$$

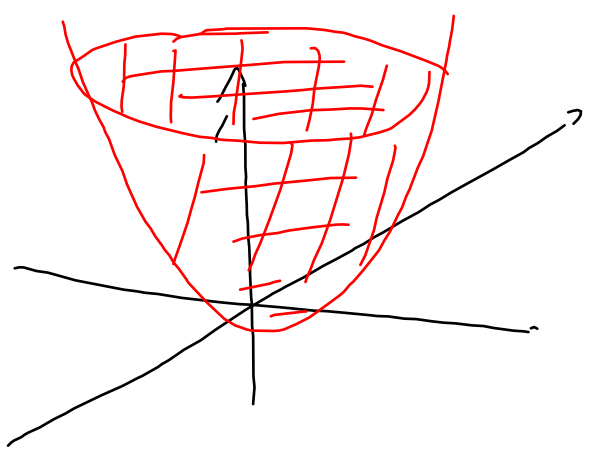


Setning: Hvis f er en konveks funksjon, så er subnivåmengdene konvekse.

Epigrafer:

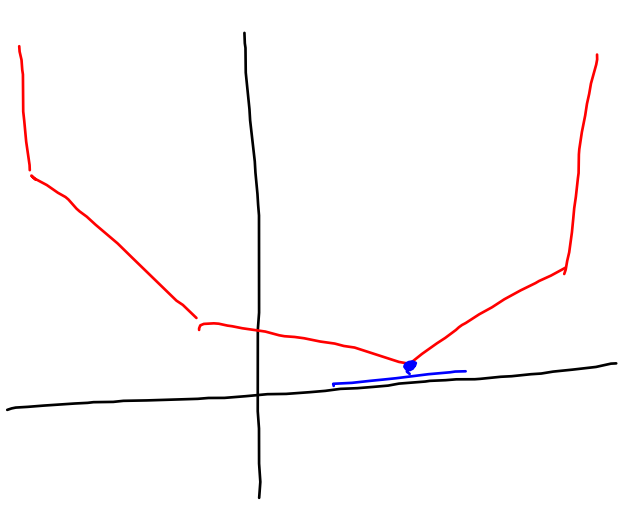
$$\text{epi}(f) = \{(\vec{x}, y) : y \geq f(\vec{x})\}$$

alle punkter på over grafen.



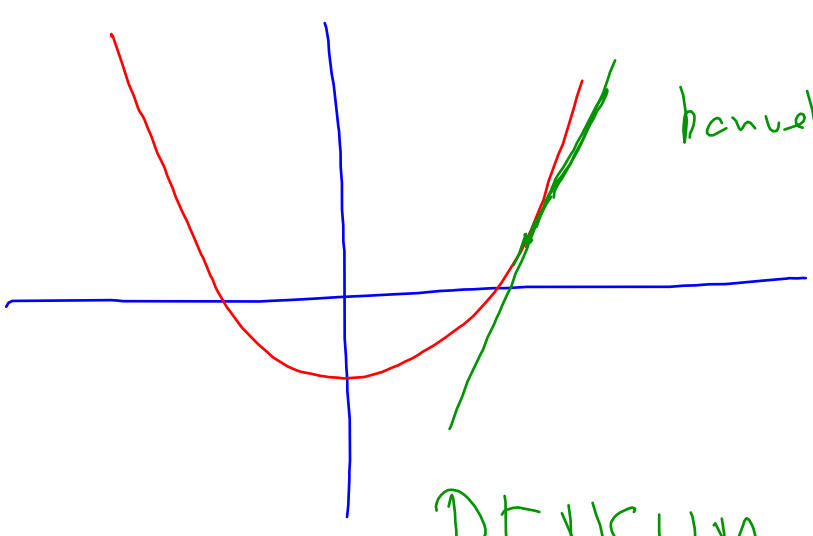
Setning: En funksjon er konveks hvis og bare hvis epigrafen er konveks.

Sammenhenger med optimering



Teorem: Hvis f er en konveks funksjon og $\bar{x}$ er et lokalt minimumspunkt, så er $\bar{x}$ et globalt minimumpunkt.

Teorem: Anta at f er en konveks funksjon med kontinuerlige annenderivater. Hvis Hesse-matrisen $\nabla^2 f(\bar{a})$ er positiv definitt for alle $\bar{a} \in C$, så er f konveks.



PENSUM ER AVSLUTTET!

Repetisjon ifra mandag!