Inverse 2 × 2-matriser

Når har $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en invers, og hva er den da?

$$I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bu \\ cx+dz & cy+du \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} ax+bz &= 1 \quad \Big| \cdot d \\ cx+dz &= 0 \quad \Big| \cdot -b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ay+bu &= 0 \quad \Big| \cdot d \\ cy+du &= 1 \quad \Big| \cdot -b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} adx+bdz &= d \\ -bcx-bdz &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ady+bdu &= 0 \\ -bcy-bdu &= -b \end{aligned}$$

$$(ad-bc)x = d \qquad (ad-bc)y = -b$$

Forutsatt at $ad-bc \neq 0$, så får vi

$$x = \frac{d}{ad-bc} \qquad y = -\frac{b}{ad-bc}$$

$$z = -\frac{cx}{d} = -\frac{c}{d}\frac{d}{ad-bc} = -\frac{c}{ad-bc} \qquad u = -\frac{ay}{b} = \frac{a}{b}\frac{b}{ad-bc} = \frac{a}{ad-bc}$$

Konklusjon: Hvis $ad-bc \neq 0$, så er A inverterbar og

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Hvis $ad-bc = 0$, så er A ikke inverterbar.

Eksempel: Sjekk $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ er inverterbar og finn i så fall den inverse.

$ad-bc = (-3)\cdot 2 - 1\cdot 4 = -6-4 = -10$ A er inverterbar

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

Eksempel: Er $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ inverterbar?

$ad-bc = 2\cdot 2 - (-4)(-1) = 4-4 = 0$ A er ikke inverterbar!

Transponering

Hvis $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$ er en $m \times n$-matrisen, så er

den transponerte A^T $n \times m$-matrisen vi får ved å gjøre om rader til søyler:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \pi & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$ 2×4-matrise

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \pi \\ -1 & 3/2 \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

Regneregler: (i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(AB)^T = B^T A^T$

(iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Bevis: (ii) $(B^T A^T)_{ij}$ = prikkprodukt av i-te rad i B^T med j-te søyle i A^T

= prikkprodukt av i-te søyle i B med j-te rad i A

$= (AB)_{ji}$

Altså $(B^T A^T) = (AB)^T$

(iii) Vi vet $I = A A^{-1}$. Transponerer

$I = I^T = (A A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$, da $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

En radvektor $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ er en $n \times 1$-matriser

$v^T = (a_1\ a_2 \cdots a_n)$ er en $1 \times n$-matrise

$v^T v = a_1 \cdot a_1 + a_2 a_2 + \cdots + a_n a_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

$1 \times n$ $\quad n \times 1$

Altså

$v^T v = \vec{v} \cdot \vec{v}$

1×1-matrise

matriseprodukt $\quad$ skalarprodukt.

To ligninger med to ukjente

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=e\\ cx+dy&=f\end{aligned}\right\}\ \text{finn } x,y$$

$\vec{x}$ $\vec{v}$

$$A\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}$$

matriseligning

$$\begin{bmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}$$

$A\vec{x}=\vec{v}$ Hvis A har en invers A^{-1}, kan vi gange med den på begge sider:

$$A^{-1}(A\vec{x})=A^{-1}\vec{v}$$

$$(A^{-1}A)\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$$

I

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{x}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}de-bf\\ -ce+af\end{bmatrix}$$

Hva skjer vis $ad-bc=0$? I de fleste tilfeller vil ligningssystemet ikke ha noen løsning, mens det i andre vil ha uendelig mange.

Matriseligninger

$A\vec{x} = \vec{b}$ hvis A^{-1} eksisterer

$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A\vec{x} = \vec{b}$ $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Finner A^{-1}: $ad - bc = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 = \underline{5}$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}}$$

Hva skjer når $ad - bc = 0$?

Eksempel:

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 3 \quad | \cdot 2 \\ 2x - 4y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-2x + 4y = 6$$

$$2x - 4y = 1$$

$ad - bc = (-1)(-4) - 2 \cdot 2 = \underline{0}$

Vi kan velge y fritt og la $x = 2y - 1$

$0 = 5$ ingen løsninger.

Eksempel

$$-x + 2y = 1$$

$$2x - 4y = -2$$

dele med -2

$$\Longrightarrow -x + 2y = 1$$

$$x = 2y - 1$$

, og

da har vi en løsning

Konklusjon: Uendelig mange løsninger.

Determinanter

Hvis A er en 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så

er **determinanten** til A gitt ved

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

A er altså invertibar hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$.

Finnes det noe tilsvarende for 3×3, 4×4 osv matriser.

Definisjon: Determinanten til 3×3-matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{33} - a_{22}a_{31})$$

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -3 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3\big(\underbrace{0\cdot(-1)}_{0} - \underbrace{(-4)\cdot 3}_{12}\big) - 1\underbrace{\big(1(-1) - (-4)\cdot 1\big)}_{-1+4} + 2(1\cdot 3 - 0\cdot 1)$$

$$-36 - 3 + 6 = -36 + 3 = -33$$

Fortsetter på samme måte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \ldots$$

Facts om determinanter: (n×n-matriser)

(i) A er inverterbar hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$.

(ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ⟸

(iii) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(iv) $\det(A^T) = \det(A)$

(v) $\det\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & c_n \end{pmatrix} = c_1 c_2 \cdots c_n$ $\quad \begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{vmatrix} = c_1c_2 - 0\cdot 0 = c_1c_2$

Bevis for (iii): $A \cdot A^{-1} = I$

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1}) \overset{(ii)}{=} \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1\cdot 1\cdots 1 = 1.$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$