Repetisjon

Idag: Funksjoner av én variabel: kap 2.1 – 2.7
kap 3

Mulige eksamensoppgaver:

Kurvedrøfting

Oppgitte max/min-problemer

Grenseoppgaven: L'Hôpital

Integrasjon — skifte av variabel
— delvis integrasjon

Hovedvolle innehavere:

Funksjoner:

Potensfunksjoner: $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$

Eksponentialfunksjoner: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, $(e^x)^y = e^{xy}$, $e^0 = 1$

Logaritmefunksjoner: $f(x) = \ln|x|$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, $\ln(x^a) = a \ln x$, $x > 0$.

$\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.

Trigonometriske funksjoner:

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Eksaktverdier på formelark.

Trigonometriske identiteter:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Derivasjonsregler

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(af(x))' = af'(x) \quad \text{for } a \text{ konstant}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x) \quad \text{kjerneregelen.}$$

Funksjonsdrøftelse

Skal undersøke funksjonen f.

Hvor er f positiv og negativ? $f>0$, $f<0$

Hvor er f voksende og avtagende? $f'>0$, $f'<0$

Hvor krummer f opp og hvor nedover? $f''>0$, $f''<0$

konveks Skjer i punkter der. konkav

Maks. og min. punkter: Endepunkter og der den deriverte bytter fortegn

Vendepunkter: Punkter der funksjonen skifter krumning

Eksempel: Drøft $f(x) = x^2 e^x$ på intervallet $[-5,1]$

1 Hvor er den pos. og hvor negativ: $f(x)>0$ for alle x unntatt 0. $f(0)=0$.

2 Hvor vokser og hvor avtar $f(x)$?

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x = x(x+2)e^x$$

Drøfter fortegnet til $f'(x)$

	-5		-2		0		1
e^x		+		+		+	
x		−		−	0	+	
$x+2$		−	0	+		+	
$f'(x)$		−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Konklusjon: f vokser i intervallene $[-5,-2]$ og $[0,1]$

f avtar i intervallet $[-2,0]$

3. Finn maks. og min. til f:

Kritiske punkter: Endepunktene $-5, -1$

Stasjonære punkter $0, -2$

Mulige makspunkter: $x=-2$, $x=1$

Mulig min punkter: $x=0$, $x=-5$

minimum - enda punkt $f(x)$ ikke er strengt positiv.

Sammenligner potensielle maks punkter:

$$f(-2) = (-2)^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2} < 1$$

$$f(1) = 1^2 \cdot e^1 = e \approx 2.718281828 > 1$$

1 er maksimumspunkt, maksverdien er e.

4: Hvor krummer $f(x)$ opp og hvor krummer den nedover?

$$f''(x) = \left((x^2+2x)e^x\right)' = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x$$

$$= e^x(x^2+4x+2)$$

Faktoriserer (x^2+4x+2): Løser $x^2+4x+2=0$:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{2} = -2\pm\sqrt{2} = \begin{cases} -2+\sqrt{2} \approx -0.6 \\ -2-\sqrt{2} \approx -3.4 \end{cases}$$

$$f''(x) = e^x\left(x-(-2-\sqrt{2})\right)\left(x-(-2+\sqrt{2})\right)$$

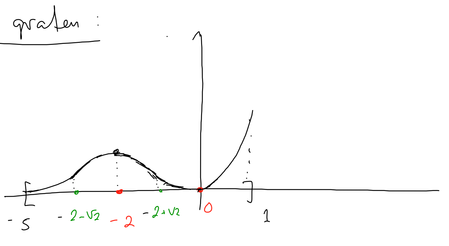
Drøfter fortegn

		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0
e^x	+		+		+		+	
$x-(-2-\sqrt{2})$	−	0	+		+		+	
$x-(-2+\sqrt{2})$	−		−		−	0	+	
$f''(x)$	+	0	−		−	0	+	
	krummer opp		krummer ned				krummer opp	

f er konveks i $[-5,-2-\sqrt{2}]$ og $[-2+\sqrt{2},1]$

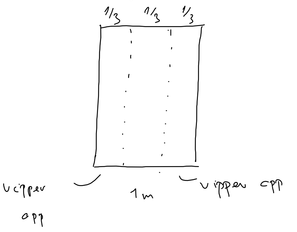
konkav i $[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}]$.

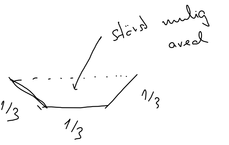
Tegner grafen:



Uoppstilte maks/min-problemer

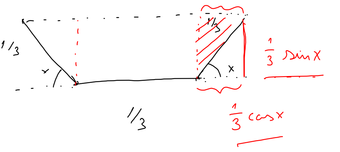
Eksempel: Blikkplate







Hva er arealet utbrettet ved x?



$$A(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin x + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{3}\cos x\cdot\frac{1}{3}\sin x$$

$$= \frac{1}{9}\underbrace{(\sin x + \cos x\sin x)}_{f(x)}$$ nå maksimere.

$$f'(x) = \cos x + (-\sin x)\sin x + \cos x\cos x$$

$$= \cos x - \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= \cos x - (1-\cos^2 x) + \cos^2 x$$

$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1\\ \sin^2 x &= 1-\cos^2 x\end{aligned}}$$

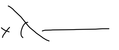
Må løse $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ $\quad u = \cos x$

$$2u^2 + u - 1 = 0$$

Løser denne

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases}\frac{1}{2}\\ -1\end{cases}$$

To løsninger $\underbrace{\cos x = \frac{1}{2}}$, $\underbrace{\cos x = -1}_{x=\pi \text{ glemmer}}$



$x = \frac{\pi}{3}$ (dvs $60°$).

Grænseværdier

L'Hôpitals regel: Anta at enten

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

eller

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

og at

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{eksisterer (gå altså til } \pm\infty\text{)},$$

så er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Eksempel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Eksempel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Eksempel:

$$\lim_{x\to 0^+} \overset{0}{x} \overset{-\infty}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{-\infty}{\ln x}}{\underset{\to\infty}{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2}{-\frac{1}{x^2}\cdot x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{-1} = \underline{\underline{0}}$$

Eksempel:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\underset{\to -\infty}{\ln(x)} + \underset{\to \infty}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x\ln x + 1}^{\to 1}}{\underset{\to 0}{x}} = \infty$$

Andre varianter:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 2x^3 - 1}{1 + 3x^2 + 7x^4} = \lim_{x\to} \frac{\cancel{x^4}\left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^4}\right]}{\cancel{x^4}\left[\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^2} + 7\right]}$$

$$= \lim \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^2} + 7} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$$

$$\lim \frac{1.2^n - 3\cdot 1.1^n}{4\cdot 1.2^n - 4\cdot 0.9^n} = \lim \frac{1.\cancel{2^n}\left(1 - 3\overset{\to 0}{\frac{1.1^n}{1.2^n}}\right)}{\cancel{1.2^n}\left(4 - \frac{0.9^n}{1.2^n}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{1.1^n}{1.2^n} = \left(\underset{\to 1}{\frac{1.1}{1.2}}\right)^n \to 0$$