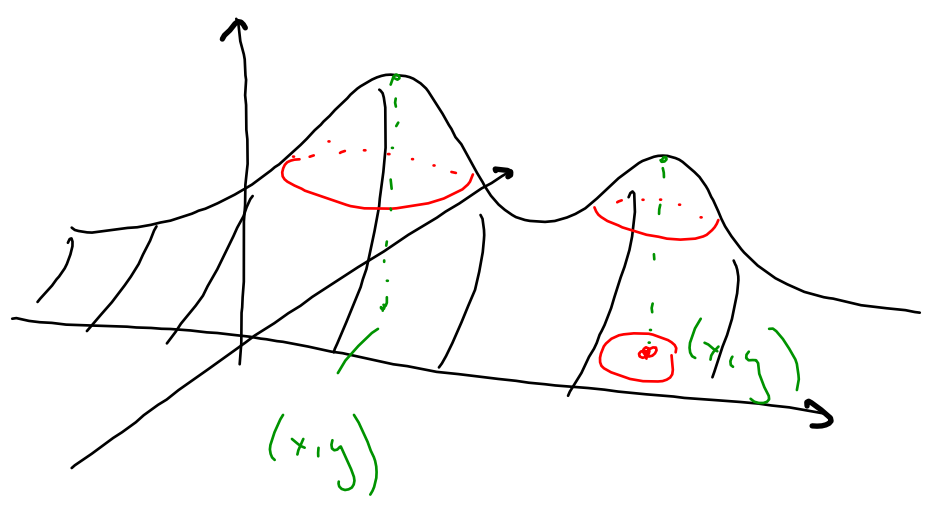
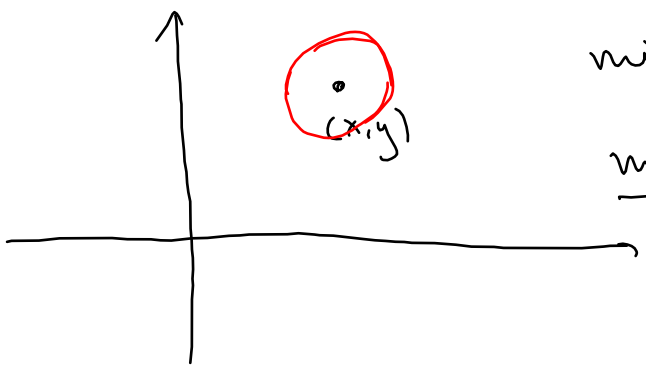
Gruppetimer: tirsdager 12-14 i Rom 107 i NTNU

Maks. og min.-problemer i flere variable

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Definisjon: Punktet (x,y) er et lokalt maksimumspunkt for f dersom det finnes en sirkel om (x,y) slik at $f(x,y) \geq f(u,v)$ for alle (u,v) som ligger innenfor sirkelen. (Tilsvarende for lokalt minimum). Vi sier at (x,y) er et (globalt) maksimumspunkt dersom $f(x,y) \geq f(u,v)$ for alle (u,v). (tilsvarende for globalt minimumspunkt).



Definisjon: Et punkt (x,y) er kritisk dersom

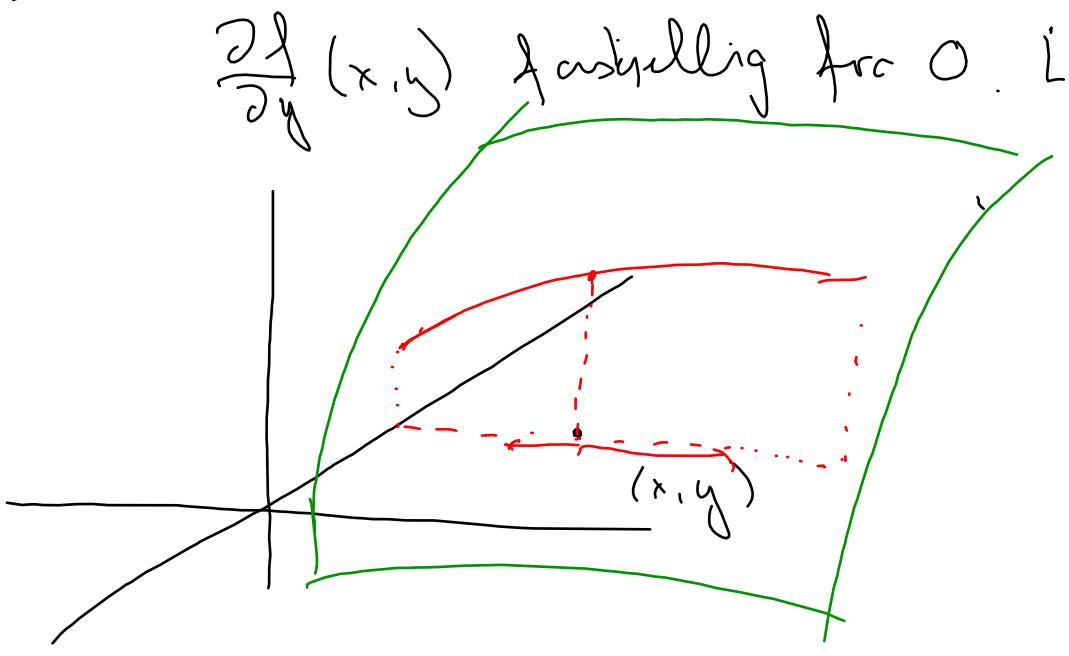
(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

eller

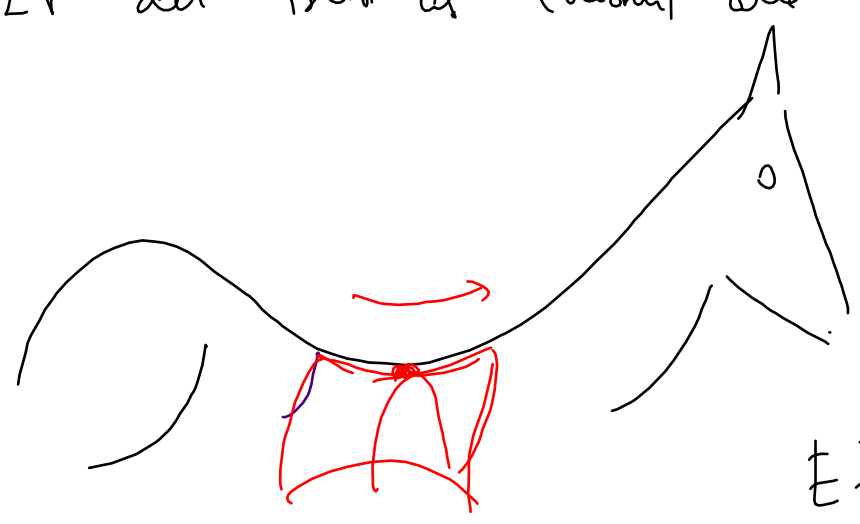
(ii) minst én av de partiellderivete eksisterer ikke.

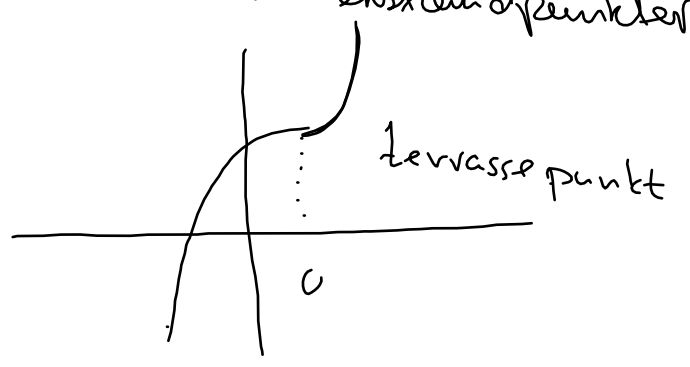
Setning: Dersom f har et lokalt maks. eller minimum i (x,y), så er (x,y) et kritisk punkt.

Hvorfor? Hvis (x,y) ikke er kritisk, så er enten $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ eller $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ forskjellig fra 0. La oss si at $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$



Er det slik at (nesten) alle kritiske punkter er lokal ekstremalpunkter?



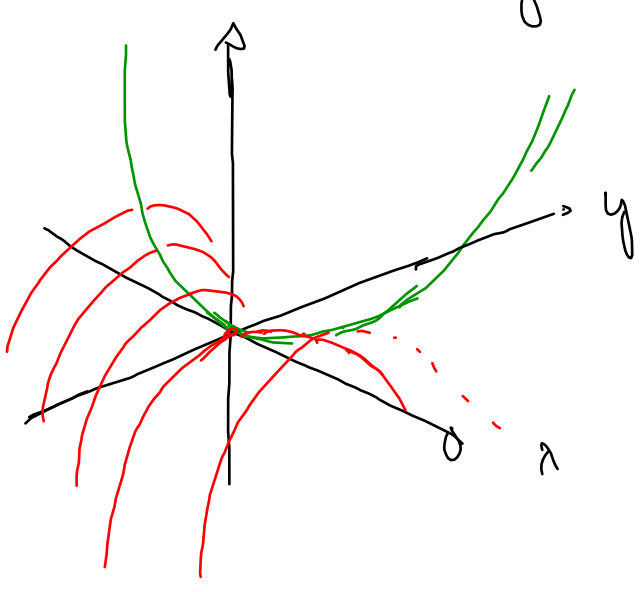


Et kritisk punkt som ikke er et lokalt maks eller min. kalles et **sadelpunkt**

Eksempel: $f(x,y) = x^2 - y^2$

Kritiske punkter: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

Når $2x = 0 \quad -2y = 0 \implies (0,0)$



Når $y = 0$: $f(x,0) = x^2$

Når $x = 0$, $f(0,y) = -y^2$

Annen derivasttesten

Spørsmål: Anta (a,b) er et kritisk punkt. Hvordan avgjør vi om (a,b) er et lokalt maks, lokalt min, eller sadelpunkt.

Annenderivattesten: Hvis $f''(a) > 0$, så er a et lokalt min.
— " — $f''(a) < 0$, — " — lokalt maks.

For funksjoner av to variable har vi 4 (3) annenderivate:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

Hesse-determinanten:

$$H(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

Annenderivattesten: Anta at (a,b) er et kritisk punkt og at de annenderivate er kontinuelig i (a,b). Da gjelder

(i) Hvis $H(a,b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, så er (a,b) et lokalt minimum.

(ii) — " — og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, så er (a,b) et lokalt maksimum

(iii) Hvis $H(a,b) < 0$, så er (a,b) et sadelpunkt.

(iv) Hvis $H(a,b) = 0$, så gir testen ingen konklusjon.

Eksempel: La oss teste testen på funksjonen $f(x,y) = x^2 - y^2$

Kritisk punkt: $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

Annenderivate: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

Hesse determinanten:

$$H(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

$(0,0)$

$$= 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$$

$(0,0)$ er et sadelpunkt

Eksempel: $f(x,y) = 2x^2y + 4xy - y^2$

Finn de kritiske punktene og avgjør hvilken type de er.

Partiellderivert: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot 2xy + 4y - 0 = \underline{4y(x+1)}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4x - 2y$$

For å finne de kritiske punktene må vi løse

$$\begin{cases} 4y(x+1) = 0 \\ 2x^2 + 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

$4y(x+1) = 0$ $\quad y = 0$ eller $x + 1 = 0$ $\quad \underline{y = 0}$, $\underline{x = -1}$

Hvis $y = 0$, så blir den nederste ligning

$$2x^2 + 4x = 0 \iff 2x(x+2) = 0 \quad \underline{x = 0}, \ \underline{x = -2}$$

Dette gir de kritiske punktene $(0,0)$ og $(-2,0)$

Hvis $x = -1$, så blir den nederste ligningen:

$$2(-1)^2 + 4(-1) - 2y = 0$$

$$2 - 4 = 2y$$

$$-2 = 2y \implies y = -1$$

Dette gir et kritisk punkt til $(-1,-1)$

Altså tre kritiske punkter $(0,0)$, $(-2,0)$ og $(-1,-1)$.

Skal undersøke hvo slags punkter det er ved å bruke annenderivattesten.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{4xy + 4y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4x - 2y$$

Regner ut de annenderivate:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy + 4y) = \underline{4y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + 4x - 2y) = \underline{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(4xy + 4y) = \underline{4x + 4}$$

Hesse-determinanten: $H(x,y) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2$

$$= 4y(-2) - (4x+4)^2 = \underline{-8y - (4x+4)^2}$$

Sjekker de kritiske punktene

$H(0,0) = -8 \cdot 0 - (4 \cdot 0 + 4)^2 < 0$, så $(0,0)$ er et sadelpunkt.

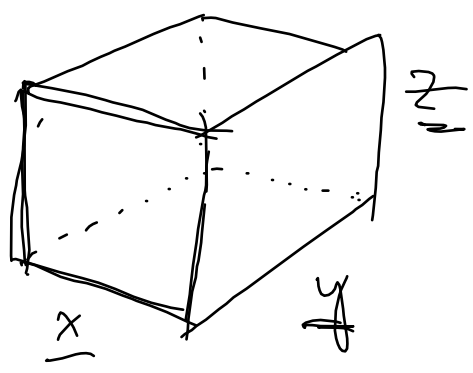
$H(-2,0) = -8 \cdot 0 - (4(-2)+4)^2 < 0$, så $(-2,0)$ er et sadelpunkt.

$H(-1,-1) = -8(-1) - \underbrace{(4(-1)+4)^2}_{0} = 8 > 0.$

Sjekker $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 4(-1) = -4 < 0$

} lokalt maksimum.

Uoppstilte oppgaver



Volum V

Hva er minst mulig overflateareal?

$$V = xyz \Longrightarrow z = \frac{V}{xy}$$

$$A = 2xy + 2xz + 2yz$$

$$= 2xy + 2x\frac{V}{xy} + 2y\frac{V}{xy}$$

$$= \underline{2xy + 2\frac{V}{y} + 2\frac{V}{x}}$$

Spørsmål: Hvilke valg av x og y gjør A minst mulig.

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2y + 0 + 2V\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underline{2y - \frac{2V}{x^2}}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2x + 2V\left(-\frac{1}{y^2}\right) + 0 = \underline{2x - \frac{2V}{y^2}}$$

Setter de partiellderivert lik 0:

$$2y - \frac{2V}{x^2} = 0 \qquad 2x - \frac{2V}{y^2} = 0$$

$$y = \underline{\frac{V}{x^2}} \qquad x = \underline{\frac{V}{y^2}}$$

Setter $y = \frac{V}{x^2}$ inn i det andre uttrykket:

$$x = \frac{V}{\left(\frac{V}{x^2}\right)^2} = \frac{V \cdot x^4}{\frac{V^2}{x^4} \cdot x^4} = \frac{Vx^4}{V^2}$$

$$x = \frac{x^4}{V} \Rightarrow x^3 = V, \quad \underline{x = \sqrt[3]{V}}$$

Hva er y? $y = \frac{V}{(\sqrt[3]{V})^2} = \frac{V}{(V^{1/3})^2} = \frac{V}{V^{2/3}} = V^{1/3}$

Hva er z? $z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{V^{1/3}V^{1/3}} = \frac{V}{V^{2/3}} = V^{1/3} = \sqrt[3]{V}$.

Sjekker om vi virkelig har et lokalt minimum:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2y - \frac{2V}{x^2} = \underline{2y - 2Vx^{-2}}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2x - \frac{2V}{y^2} = 2x - 2Vy^{-2}$$

Annenderivert: $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2y - 2Vx^{-2}) = 0 - 2V(-2x^{-3})$

$$= \underline{4Vx^{-3}}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \underline{4Vy^{-3}}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2y - 2Vx^{-2}) = 2 - 0 = \underline{2}$$

Hesse-determinanten:

$$H(x,y) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}\right)^2 = 4Vx^{-3} \cdot 4Vy^{-3} - 2^2$$

$$= \frac{16V^2}{x^3y^3} - 4 = \frac{16V^2}{(\sqrt[3]{V})^3(\sqrt[3]{V})^3} - 4 = 16 - 4 = 12 > 0$$

($V \cdot V$)

Siden $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 4Vx^{-3} > 0$ — lokalt minimum