Determinanter

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

hvor $|A_{ij}|$ er den 2×2-determinanten vi får når vi fjerner den i-te raden og den j-te søyten.

Fortegns mønster:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{fortegn} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & + & - & \cdots \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

Fortegnet til a_{ij} er $(-1)^{i+j}$

Ekspander etter andre rad:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-1-6) + 0 + (3+2) = 7+5 = \underline{12}$$

Ekspander etter første søyle:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(3-0) + (3+2) + (0+1) = 6+5+1 = \underline{12}$$

Noen egenskaper ved determinanter:

(i) $\det(A) \neq 0$ hvis og bare A er inverterbar

(ii) Hvis vi bytter om på to rader eller to søyler, så skifter determinanten fortegn.

(iii) Hvis to rader er like eller to søyler er like, så er determinanten 0.

(iv) Hvis en rad eller søyle er null, så er determinanten null.

Oppgave 3, ekstraoppgaven til kapittel 4

3a) Gjett

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 1.02 & 0.01 \\ -0.2 & -0.04 & 0.98 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

Hvis at

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ er inversmatrisen til A.

Må vise at $AB = I_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 1.02 & 0.01 \\ -0.2 & -0.04 & 0.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 0.02 + 0.02 & -0.2 + 0.2 & -0.1 + 0 + 0.1 \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Tre fiskeslag $\bar{X}$, $\bar{Y}$, Z: Et år er det x fisk av type $\bar{X}$,
y — " — $\bar{Y}$
z fisk av type Z

La $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Året etter vil det være $A\vec{r}$ fisk av de ulike slagene.

Hvis det ett år er 4000 fisk av type $\bar{X}$
2000 — " — $\bar{Y}$
1000 — " — Z,

hvor mange var det da året før?

Anta at antall fisk året før $\vec{r_0} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Da må

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix} = A\vec{r_0} \quad | \text{ Ganger med } A^{-1} \text{ fra venstre}$$

$$A^{-1}\vec{r} = A^{-1}Ar_0 = I\vec{r_0} = \vec{r_0}$$

Altså

$$\vec{r_0} = A^{-1}\vec{r} = B\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4000 - 400 - 100 \\ -400 + 2000 + 0 \\ 800 + 0 + 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 1600 \\ 1800 \end{bmatrix}$$

3500 av slag $\bar{X}$
1600 av slag $\bar{Y}$
1800 av slag Z

Lineære ligningssystemer

Eks:

$$2x - 4y = 3$$
$$4x - 5y = 7$$

Eks:

$$2x - 3y + 4z = 2$$
$$-x + 4y - z = 3$$

Eks:

$$2x - y = 4$$
$$x - y = 3$$
$$2x + 77y = -4$$

Generelt:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$$

m ligninger med n ukjente

Mest aktuelt: $m = n$

$m < n$ Færre ligninger enn ukjente. Vanligvis har vi da uendelig mange løsning.

Aktuell problemstilling: Finn den "beste" løsning.

$m > n$: Flere ligninger enn ukjent. Vanligvis har vi ingen løsning.

Aktuell problemstilling: Finne "beste" vedløsning, minste kvadraters metode.

Hva med $m = n$: Skriver om systemet på matriseform:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Matriseligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ er ekvivalent med ligningssystemet.

Vet at hvis A er inverterbar (dvs $\det(A) \neq 0$), så har ligningen en entydig løsning $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ for alle $\vec{b}$.

Hva skjer hvis A ikke er inverterbar? Det typiske er at den har uendelig mange løsninger for noen $\vec{b}$, og ingen løsninger for andre $\vec{b}$'er.

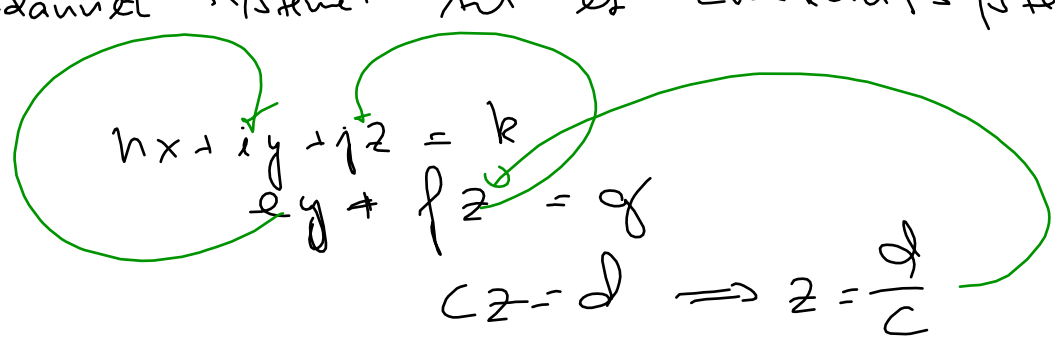
Gauss-eliminasjon

Eksempel:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ 2x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 5y + z &= 2 \\ -3x - 6y - 3z &= -3 \quad (-3)\,\text{I} \\ \hline -y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Mål: få ordnet systemet til et trekantsystem



$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ 2x + 2y + z &= 3 \end{aligned} \qquad \text{II} + (-3)\text{I}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 3 \\ -2x - 4y - 2z &= -2 \quad (-2)\text{I} \\ \hline -2y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \quad \leftarrow \text{Bruke } y\text{-leddet i ligning II til å kvitte } y\text{-leddet i ligning III.} \\ -2y - z &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} -2y - z &= 1 \\ 2y + 4z &= 2 \quad (-2)\,\text{II} \\ \hline 3z &= 3 \end{aligned}$$

Trappefasm

Hurra!

$$\left\{ \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \quad \leftarrow \\ 3z &= 3 \end{aligned} \right.$$

Løser for z: $z = 1$

Løser for y: $y = 1 - 2 \cdot z = 1 - 2 \cdot 1 = -1$

Løser for x: $x = 1 - 2y - z = 1 - 2(-1) - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$

Gausseliminasjon av matriser

Utvidet matrise $A\vec{x} = \vec{b}$: $[A \vdots \vec{b}]$

↳ putter inn $\vec{b}$ som siste søyle.

$$x + 2y + z = 1$$
$$3x + 5y + z = 2$$
$$2x + 2y + z = 3$$

Utvidet matrise $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Gjennomfører operasjonene på matrisen: Har lov til å:

(i) Bytte om på to rader

(ii) Gange en rad med et tall ulikt 0.

(iii) Legge et multiplum av en rad til en annen rad.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{II + (-3)I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{III + (-2)I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{III + (-2)II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \overset{\cdot(-1)II}{\sim} \overset{\frac{1}{3}III}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Går tilbake til ligninger:

$$x + 2y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y - z = 1 - 2(-1) - 1 = \underline{\underline{2}}$$
$$y + 2z = 1 \Rightarrow y = 1 - 2z = 1 - 2 \cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$$
$$z = 1$$