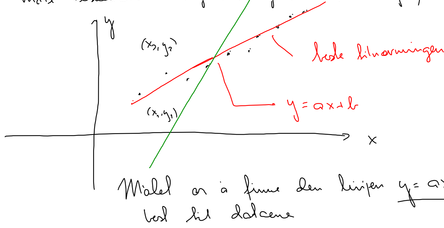
Summeckegn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Exempel: $\sum_{i=3}^{7} 3^i = 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7$

Minsta kvadraters metoden

Anta att vi studerar ett fenomen med två variabla storheter x och y som antingen är linjära eller kan linjäriseras. Vi vet att det finns en linjär ekvation $y = ax + b$, men vi känner inte a och b. Uppgiften är att göra observationer för att finna a och b. Vi får mätvärdena $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$



Målet är att finna den linjen $y = ax + b$ som passar bäst till datasetet

Fel vid valet av a och b

$$f(a,b) = \underbrace{(ax_1 + b - y_1)^2}_{\text{kvadrat}} + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

(kvadrat = avvikelse)

Uppgiften är att finna de värdena av a och b som gör $f(a,b)$ minst möjlig

Partialderivator mhp. a och b:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)$$

Finner nollpunkterna:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0 \text{ när } 0 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i)$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 0 \text{ när } 0 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Detta ger ekvationen:

$$\begin{cases} a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

(A, B, C, D)

Må lösas för a, b.

Omskrivet

$$\begin{cases} Aa + Bb = C \\ Ba + nb = D \end{cases} \quad \begin{matrix} n \\ -B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} nAa + nBb = nC \\ -Ba - nBb = -BD \end{matrix}$$

Subtrahera:

$$(nA - B^2)a + \cancel{Cb} = nC - BD$$

$$a = \frac{nC - BD}{nA - B^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Finner b ur $Ba + nb = D$:

$$b = \frac{D - Ba}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Exempel: Förhållandet mellan höjden och vikten hos barn

Höjde x	105	110	118	123	128	132	138	144
Vikt y	17.1	19.8	20.8	23.0	25.0	27.5	30.5	35.0

$n = 8$

Vi vill finna linjen $y = ax + b$ som passar bäst till datasetet.

$\sum x_i = 998$, $\sum y_i = 197.9$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 125776$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 25247.9$

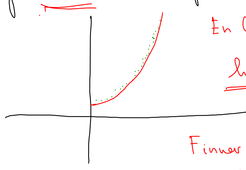
$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{8 \cdot 25247.9 - 998 \cdot 197.9}{8 \cdot 125776 - (998)^2} = 0.4424$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{197.9 - 0.4424 \cdot 998}{8} = -30.5$$

Bästa linjen $y = ax + b = 0.4424x - 30.5$

Andre former for regresjon:

$y = Ce^{ax}$ (C og a er ukjente)



En (av flere måter):

$\ln y = \ln(Ce^{ax}) = \ln C + \ln(e^{ax})$ (ax)

$= ax + \ln C$

Finner en lokal lineær tilnærming til problem

$(x_i, \ln y_i)$

$y = Dx^r$ (D og r er ukjente)

$\ln y = \ln(Dx^r) = \ln D + \ln x^r = \ln D + r \ln x$

$= r \ln x + \ln D$

Finner lokal lineær tilnærming til problem

$(\ln x_i, \ln y_i)$

Integralen

En funktionen $F(x)$ är en **antiderivata** till $f(x)$ om

$$F'(x) = f(x)$$ i alla punkter där f är definierad.

Hur $F(x)$ är en antiderivata till $f(x)$, så är

$G(x) = F(x) + C$ också en antiderivata:

$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x) + 0 = f(x)$$

Andra antiderivator finns icke.

Vi betecknar den generella antiderivatan till f med

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

och kallar detta det **obestämda integralen** till $f(x)$.

Lista av obestämda integraler

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad \text{för } r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

Generella regler: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ (a konstant)

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Exempel:

$$\int (3\cos x - 7e^x)\,dx = \int (3\cos x + (-7)e^x)\,dx$$

$$= \int 3\cos x\,dx + \int (-7)e^x\,dx = 3\int \cos x\,dx + (-7)\int e^x\,dx$$

$$= 3(\sin x + C_1) - 7(e^x + C_2) = 3\sin x - 7e^x + 3C_1 - 7C_2$$

$$= 3\sin x - 7e^x + C$$

Delvis integration: $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

Lämplig när att detta är enklare att lösa!

Hurdan gäller detta? $(uv)' = u'v + uv'$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Integrera:

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx - \int u'v\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

(uv = $\int (uv)'\,dx$; u, v')

Exempel: $\int xe^x\,dx$

Delvis integration med $u = x$, $v' = e^x$, $u' = 1$, $v = e^x$

$$= xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx$$

$$= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Exempel: $\int x \ln x\,dx$

$u = \ln x$ $\quad v' = x$

$u' = \frac{1}{x}$ $\quad v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Exempel: $\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx$

$u = \ln x$ $\quad v' = 1$

$u' = \frac{1}{x}$ $\quad v = x$

$$= x\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

Exempel: $\int x^2 \sin x\,dx$

$u = x^2$, $v' = \sin x$

$u' = 2x$, $v = -\cos x$

$$= -x^2\cos x - \int 2x(-\cos x)\,dx$$

$$= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx$$

$u = 2x$ $\quad v' = \cos x$

$u' = 2$ $\quad v = \sin x$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\,dx$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2(-\cos x) + C$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$