Gausseliminasjon

$$x + 2y - z = 2$$
$$2x - y + z = 1$$
$$x - 8y + 5z = -4$$

Utvidede matrisen

$$\begin{matrix} & -2 & -4 & 2 & -4 \\ \left[\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 5 & -4 \end{matrix}\right] & & & & \end{matrix}$$

$\sum$ II + (-2)I

$$\begin{matrix} & -1 & -2 & 1 & -2 \\ \left[\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 1 & -8 & 5 & -4 \end{matrix}\right] & & & & \end{matrix}$$

$\sum$ III + (-1)I

$$\begin{matrix} & 0 & 10 & -6 & 6 \\ \left[\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -10 & 6 & -6 \end{matrix}\right] & & & & \end{matrix}$$

$\sum$ III + (-2)II

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \quad \uparrow 1$$

$0z = 1$ ingen løsning

Tilsvarende ligningssystemet:

$$x + 2y - z = 2$$
$$-5y + 3z = -3$$

$0z = 0 \Rightarrow$ velger z fritt

$$-5y = -3 - 3z \Rightarrow y = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}z$$

$$x = 2 - 2y + z = 2 - 2\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5}z\right) + z$$

$$= 2 - \frac{6}{5} - \frac{6}{5}z + \frac{5}{5}z$$

$$\frac{10}{5} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}z$$

Ligningssystemet har uendelig mange løsninger:

Vi kan velge z fritt, men må da sette

$$y = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}z \quad \text{og} \quad x = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}z$$

Spektralteori

Hvis A er en $n \times n$-matrise og $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq 0$, da kalles $\vec{v}$ en egenvektor til A dersom det finnes et tall λ slik at

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

Dette tallet λ kalles egenverdien til $\vec{v}$.

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vis at $\vec{v}$ er en egenvektor og finn egenverdien.

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-8)(-1) \\ (-2)2 + 1(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 5\vec{v}$$

$\vec{v}$ er en egenvektor med egenverdi 5.

Velg istedenfor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Er dette en egenvektor?

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 24 \\ -2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \lambda \vec{u} \text{ for alle } \vec{u}.$$

Hvordan finner man egenverdier og egenvektorer?

Hvis λ er en egenverdi for A så er

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{for en ikke-null } \vec{v} \neq \vec{0}$$

Skriver om: $A\vec{v} = \lambda I\vec{v}$

$$A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad \text{for } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Denne ligningen har bare en ikke-null løsning når $(A - \lambda I)$ ikke er inverterbar, dvs når $\det(A - \lambda I) = 0$.

Teorem: λ er en egenverdi for matrisen A hvis og bare hvis $\det(A - \lambda I) = 0$.

↑ n-te gradsligning når A er en $n \times n$-matrise

Eksempel: Finn egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Får

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -8 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Dermed

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -8 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 16$$

$$= 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 2\lambda - 15 \leftarrow \text{karakteristisk polynom til } A.$$

Finner egenverdiene:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ -\frac{6}{2} = -3 \end{cases} \quad \underbrace{\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -3}_{\text{egenverdiene}}$$

Vi har vist at matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ har egenverdiene $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$.

Vil finne egenvektorene:

$\lambda_1 = 5$: En egenvektor $\vec{v}_1$ må oppfylle $(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{0} = (A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x - 8y \\ -2x - 4y \end{bmatrix}$$

Må ha

$$\left.\begin{aligned} -4x - 8y = 0 &\Rightarrow -2y = x \\ -2x - 4y = 0 &\Rightarrow -2y = x \end{aligned}\right\} \text{velger } y = 1, \text{ får } x = -2$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prøver $\lambda_2 = -3$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{0} = (A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 8y \\ -2x + 4y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x - 8y = 0 &\Rightarrow x = 2y \\ -2x + 4y = 0 &\Rightarrow x = 2y \end{aligned}\right\} \text{velger } y = 1, \text{ får } x = 2$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Konklusjon: $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ har en egenverdi $\lambda_1 = 5$ med egenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og en egenverdi $\lambda_2 = -3$ med egenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene:

Egenverdiene er løsninger av ligningen

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1.1-\lambda & -0.2 \\ 0.1 & 0.8-\lambda \end{bmatrix} = (1.1-\lambda)(0.8-\lambda) + 0.02$$

$$0.88 - 1.1\lambda - 0.8\lambda + \lambda^2 + 0.02$$

$$= \lambda^2 - 1.9\lambda + 0.9$$

Løser: $\lambda = \frac{1.9 \pm \sqrt{(1.9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.9}}{2 \cdot 1} = \frac{1.9 \pm \sqrt{3.61 - 3.6}}{2}$ ($\sqrt{0.01}$)

$$= \frac{1.9 \pm 0.1}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{1.8}{2} = 0.9 \end{cases}$$

To egenverdier $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0.9$.

Finner egenvektorer:

$\lambda_1 = 1$: $(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$ $\quad (A - 1I) = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1x - 0.2y \\ 0.1x - 0.2y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 0.1x - 0.2y = 0 \\ 0.1x - 0.2y = 0 \end{matrix}\right\} \quad x = 2y \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 0.9$: $\quad A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$

Må løse

$$\vec{0} = (A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2x - 0.2y \\ 0.1x - 0.1y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 0.2x - 0.2y = 0 \Rightarrow x = y \\ 0.1x - 0.1y = 0 \Rightarrow x = y \end{matrix}\right\} \text{Velger } y = 1, \text{ da } x = 1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppsummering: $\lambda_1 = 1$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 0.9$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) I et vann av de to fiskeslag $\overline{X}$ og $\overline{Y}$. Hvis det i år er x_n en x_n fisk av type $\overline{X}$ og y_n fisk av type $\overline{Y}$, da vil det året etter være

$$x_{n+1} = 1.1x_n - 0.2y_n$$

$$y_{n+1} = 0.1x_n + 0.8y_n$$

Hvis vi har $\vec{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, da er

$$\vec{r}_{n+1} = A\vec{r}_n = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

År 0: $\vec{r}_0$

År 1: $\vec{r}_1 = A\vec{r}_0$

År 2: $\vec{r}_2 = A\vec{r}_1 = A(A\vec{r}_0) = A^2\vec{r}_0$

År 3: $\vec{r}_3 = A\vec{r}_2 = A(A^2)\vec{r}_0 = A^3\vec{r}_0$

⋮

År n: $\vec{r}_n = A^n\vec{r}_0$

Hvor mange fisk er det i innsjøen etter n år når $x_0 = 3000$, $y_0 = 1000$?

Vi uttrykker $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ ved hjelp av egenvektorene

$$\vec{r}_0 = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2x + y = 3000 \\ -\ x + y = 1000 \end{matrix}$$

$$x = 2000, \quad y = -1000$$

Altså $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix} = 2000\vec{v}_1 - 1000\vec{v}_2$

Etter n år:

$$\vec{r}_n = A^n\vec{r}_0 = A^n(2000\vec{v}_1 - 1000\vec{v}_2) = 2000A^n\vec{v}_1 - 1000A^n\vec{v}_2$$

$A\vec{v}_1 = \vec{v}_1$, $A^2\vec{v}_1 = A(A\vec{v}_1) = A\vec{v}_1 = \vec{v}_1$, ... $A^n\vec{v}_1 = \vec{v}_1$

$A\vec{v}_2 = 0.9\vec{v}_2$, $A^2\vec{v}_2 = A(0.9\vec{v}_2) = 0.9A\vec{v}_2 = 0.9^2\vec{v}_2$ ... $A^n\vec{v}_2 = 0.9^n\vec{v}_2$

$$\vec{r}_n = 2000\vec{v}_1 - 1000 \cdot 0.9^n\vec{v}_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2000\vec{v}_1 = 2000\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$