Lineær algebra : $\mathbb{R}^n$

Hovedvalg i innhaveren:

Vektorer $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Matriser $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$ $m \times n$ - matrise

Regneoperasjoner: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$

$$\lambda \vec{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{m1} & \cdots & & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplikasjon av matriser:

$$A \times B = C$$

$m \times n \quad n \times k \quad m \times k$

$$AB = \begin{bmatrix} \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

A B

c_{ij} = skalarprodukt mellom den i-te raden i A og den j-te søylen i B

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2×3 $\quad$ 3×2

6 - 1 $\quad$ 3+3+2 $\quad$ 2×2 - matrise

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ \text{---} & -1 + 0 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Regneregler: $A(BC) = (AB)C$

$A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$

Men generelt er $AB \neq BA$

ADVARSEL: PASS PÅ REKKEFØLGEN NÅR DERE REGNER MED MATRISER!

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}}_{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}} \Big\} \text{Riktig}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \underbrace{A\vec{x}\,A^{-1}}_{} = \vec{b}\,A^{-1} \Rightarrow \vec{x} = \underbrace{\vec{b}\,A^{-1}}_{} \quad \text{Galt/ mening gått!}$$

Matrise ganger vektor

$$A\vec{b} = \underset{m \times n}{A}\ \underset{n \times 1}{b} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

A transformerer $\vec{b} \rightarrow$ blir til $A\vec{b}$.

Transponerte matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ $\qquad$ $n \times m$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Kvadratiske matriser

$n \times n$ - matriser $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$ Identitetsmatriser

Grunnleggende egenskap:

$$A \cdot I_n = I_n A = A$$

Inverser: En matrise A er **inverterbar** dersom det finnes en matrise B slik at $AB = I_n$ og $BA = I_n$.

Resultater: Det finnes høyst én slik matrise B, og den kalles den inverse til A og betegnes med A^{-1}.

Dersom enten $AB = I_n$ eller $BA = I_n$, så er A inverterbar og $B = A^{-1}$.

Regneregler: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Formel for 2×2-matriser:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ligningsløsning:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Hvis A er inverterbar, så

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$I_n\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

A inverterbar $\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$.

Determinanter

2×2:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

3×3:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regneregler:

(i) $\det(A) \neq 0$ hvis og bare hvis A er inverterbar.

(ic) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{-1}$

(iii) $\det(A^T) = \det(A)$ ←

(iv) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Eksempel: En matrise U er **ortogonal** dersom $U^T = U^{-1}$ (altså at skrivelsen ved å speile U om en ortonormal mengde $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$)

Vis at hvis U er ortogonal, så er

$$\det(U) = \pm 1.$$

$$1 = \det I_n = \det(UU^{-1}) = \det(UU^T) = \det(U)\det(U^T)$$
$$= \det(U)^2$$

altså må $\det(U) = \pm 1$.

Linearkombinasjoner og basiser

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$

En linearkombinasjon

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k \quad , \; x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n.$$

Def: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ er **lineært uavhengige** dersom en lin. komb.

$x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_k\vec{v}_k$ bare er $\vec{0}$ dersom $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.

Dette er ekvivalent med at to lineær kombinasjoner

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k \quad y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \cdots + y_k\vec{v}_k$$

bare er like dersom $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_k = y_k$.

Def: Vi sier at $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ dersom $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ er lineært uavhengig og at ethvert element i $\mathbb{R}^n$ kan skrives som en lin. komb. av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Setning: Dersom $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ er n vektorer, $\mathbb{R}^n$, så er følgende ekvivalent:

(i) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$

(ii) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ er lin. uavh.

(iii) Ethvert element i $\mathbb{R}^n$ kan skrives som en lin. komb. av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$

Teorem: Hvis A er en $n \times n$-matrise, så er følgende ekvivalent:

(i) A er invertibar

(ii) $\det(A) \neq 0$

(iii) $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$.

(iv) Søylene i A danner en basis

(v) Radene i A danner en basis

Egenverdier og egenvektorer

A er en $n \times n$-matrise

Vi sier at $\vec{v}$ er en egenvektor for A dersom $\vec{v} \neq 0$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{for en } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vi kaller λ egenverdien hørt til $\vec{v}$.

Observasjon:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff A\vec{v} = \lambda I\vec{v} \iff A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = 0 = (A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

så ligningen $(A - \lambda I)$ må ha en løsning $\vec{v} \neq 0$, og følgelig

er $A - \lambda I$ ikke inverterbar, dvs $\det(A - \lambda I) = 0$.

Dette betyr at λ er en egenverdi hvis og bare hvis

$\det(A - \lambda I) = 0$ (den karakteristiske ligning)

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ Finn egenverdiene og egenvektorene.

Karakteristisk ligning

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda) - 8 \cdot 2$$

$$= 4(-2) + 4(-\lambda) + (-\lambda)(-2) + (-\lambda)(-\lambda) - 16$$

$$= -8 - 4\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 16$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 24$$

Løser $\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0$:

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2} = \begin{cases} 6 \\ -4 \end{cases}$$

Egenverdier: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -4$.

Finner en egenvektor $\vec{v}_1$ hørt til λ_1:

$$\vec{0} = (A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \right) \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4-6 & 2 \\ 8 & -2-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + 2y \\ 8x - 8y \end{bmatrix}$$

Må ha $-2x + 2y = 0$ og $8x - 8y = 0$

$x = y$ Velger $y = 1$, og får $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Egenvektor hørt $\vec{v}_2 = -4$

$$\vec{0} = (A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4-(-4) & 2 \\ 8 & -2-(-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x + 2y \\ 8x + 2y \end{bmatrix}$$

Må ha $8x + 2y = 0 \Rightarrow y = -4$

Velger $x = 1$, får $y = -4 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

Teorem: Hvis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier, så er $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ lineært uavhengige.

Korollar: Hvis A er en $n \times n$-matrise med n reelle egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, så har A en basis av egenvektorer.

Spektralteoremet: Hvis A er en symmetrisk $n \times n$-matrise, så har A alltid en ortonormal basis av egenvektorer.