INGEN FORELESNING PÅ TORSDAG

Litt om mengder

En mengde er en samling (endelig eller uendelig) av matematiske objekter.

Eksempel: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$2 \in A$ 2 er med i mengden A

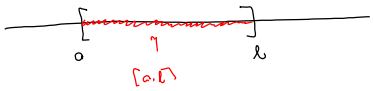
$6 \notin A$ 6 er ikke med i A

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ mengden av naturlige tall

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ mengden av hele tall

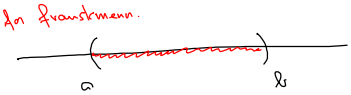
$\mathbb{R}$ = tallene på tallinjen = reelle tall

Intervaller: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ lukket intervall



$\langle a,b \rangle = (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ åpent intervall

$]a,b[$ — kun for franskmenn.



Uendelig intervaller: $[a, \rightarrow) = [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



$(\leftarrow, a) = (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



Halvåpne intervall: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a,b] = \ldots\ldots$

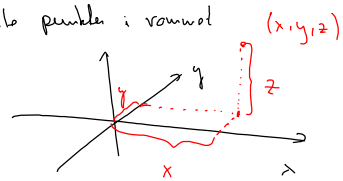
$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ = alle ordnede par av reelle tall

= alle punkter i planet



$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ = alle ordnede tripler av reelle tall

= alle punkter i rommet



$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ = alle n-tupler av reelle tall

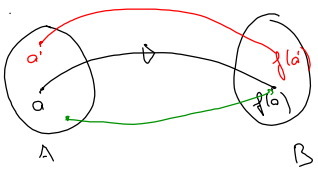
= alle punkter i et n-dimensjonalt rom

= alle lister med n elementer.

Eksempel: $(-\pi, \frac{3}{2}, 17, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^4$

Funksjoner

Generelt: Anta at A og B er to mengder. En **funksjon** fra A til B er en regel eller tilordning som til hver $a \in A$ tilordner en $f(a) \in B$.



$f : A \to B$ betyr at "f er en funksjon fra A til B"

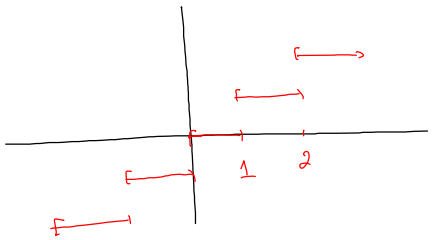
For oss vil A og B bygget være (delmengder av) $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^n$

En funksjon kan spesifiseres gjennom

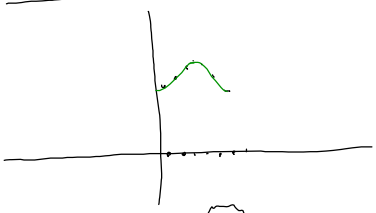
(i) En formel: $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(ii) Flere formler: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{for } x < 1 \\ \sin(x^2) & \text{for } x \geq 1. \end{cases}$

(iii) Gjennom ord: $f(x)$ er lik det største heltallet mindre enn eller lik x.



Praktisk bruk av funksjoner: Temperaturen i Vestbyen ved klokken t: $f(t)$



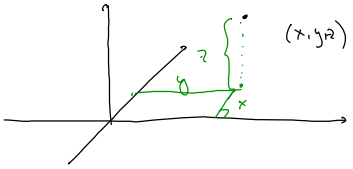
tid	temp
6	12
7	13
8	15



funksjon gitt ved en graf.

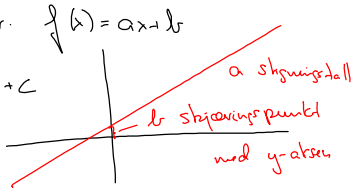
$T(x, y, z, t)$

$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

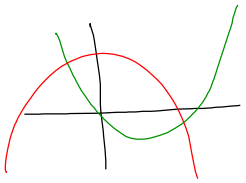


Några vanliga funktionstyper: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Förstagradsfunktioner, linjära funktioner: $f(x) = ax + b$



2. Andragradsfunktioner: $f(x) = ax^2 + bx + c$



3. Polynomer: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — n-tegrads polynom.

Exempel: $f(x) = 7x^4 \underset{+(-3)}{-3}x^3 + 2x^2 + 7x + 1$ — 4-grads polynom

$f(x) = 5x^5 - 3x^2 + 2x$, $0x^4$, $0x^3$, $+0$ — 5-grads polynom

4. Rationella funktioner:

$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$, $P(x), q(x)$ är polynomer

$f(x) = \frac{-x^{17} + 2x^{13} - 14}{2x^{33} + 2x^7 - x^2}$

5. Potensfunktioner: $f(x) = x^r$ där $r \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Ex. $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$

6. Exponentialfunktioner: $f(x) = a^x$ $\quad a > 0$

Viktigast: $f(x) = e^x$

Räkneregler: $a^{m+n} = a^m a^n$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$

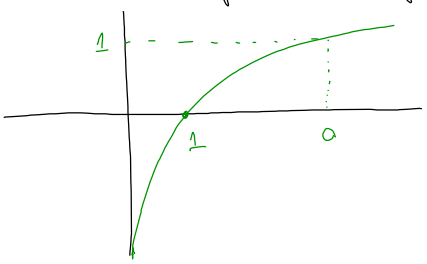
7. Logaritmfunktioner: $\log_a x$

$\begin{cases} a = e & \log_e x = \ln x = \log x \\ a = 10 & \log_{10} x = \lg x \\ a = 2 & \log_2 x \end{cases}$

Definition: $a^{\log_a x} = x$

Räkneregler:

$$\left.\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a(x^r) &= r \log_a(x) \end{aligned}\right\} \quad x, y > 0$$



8. Trigonometriska funktioner: Sinus, cosinus, tangens, cotangens

Kombinationer av funktioner:

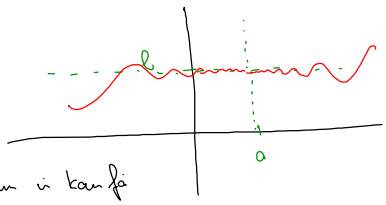
Algebraiska kombinationer: $\frac{\sin x + e^x}{x^2 + \ln(x+e)}$

Sammansatta funktioner: $f(x) = g(h(x))$: $f(x) = \ln(\sin x)$, $f(x) = e^{\cos x}$

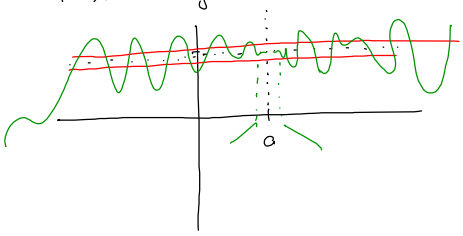
Kombinerar alt: $f(x) = \frac{e^{\cos x} + \ln(\tan x)}{3\cos x + \tan(\sin x)}$

Grenseverdier

Hva betyr $\lim_{x \to a} f(x) = b$?

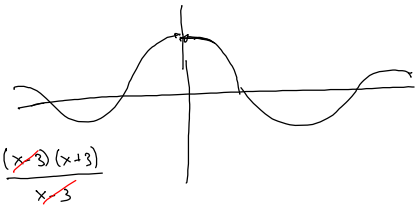


Vi sier at $\lim_{x \to a} f(x) = b$ dersom vi kan få avstanden $|f(x) - b|$ så liten vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær a (men ikke lik a)



Eksempel: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ for $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Eksempel:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x+3) = 6$$

Eksempel

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^3 - 2x + 5}{5x^3 - x^2 + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(7 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(5 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{7 - \left(\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}{5 - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)} = \frac{7}{5}$$

($\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \to 0$, $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \to 0$)

Följer

En följe är en (oändlig) serie av tal:

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

Exempler: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ Fibonacci-talföljd

$\lim_{n \to \infty} a_n = k$ betyder att vi kan få a_n så nära k vi vill genom att välja n tillräckligt stor.

Exempel: $a_n = \frac{\sin n}{n}$ $\lim a_n = 0$

Rekker

Intuitivt er en rekke en uendelig sum

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Delsummer:

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Vi sier at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer mot k dersom

$$\lim_{N \to \infty} S_N = k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Dersom denne grenseverdien ikke eksisterer, sier vi at rekken divergerer

Geometrisk rekke:

$$a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \dots + a_0 r^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$$

med kvotient r.

Denne rekken konvergerer når $|r| < 1$

Finn summen når $|r| < 1$.

Delsummer:

$$S_N = a_0 + a_0 r + \dots + a_0 r^N$$

$$r S_N = a_0 r + a_0 r^2 + \dots + a_0 r^{N+1}$$

$$S_N - r S_N = a_0 - a_0 r^{N+1}$$

$$S_N (1 - r) = a_0 (1 - r^{N+1}) \Rightarrow S_N = \frac{a_0 (1 - r^{N+1})}{1 - r}$$

$\to 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \lim_{N \to \infty} S_N = \lim \frac{a_0 (1 - r^{N+1})}{1 - r} = \frac{a_0}{1 - r}$$

Altså: Summeformel for uendelig geometrisk rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1 - r} \quad \text{forutsatt at } |r| < 1$$