Egenvektorer og egenverdier

Eksempel: a) Finn egenverdier og -vektorer til

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.2 & 1.1 \end{bmatrix}$$

Finner egenverdier:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.9-\lambda & 0.4 \\ 0.2 & 1.1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (0.9-\lambda)(1.1-\lambda) - 0.4 \cdot 0.2$$

$$= 0.99 - 0.9\lambda - 1.1\lambda + \lambda^2 - 0.08$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 0.91$$

Bruker abc-formelen $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.91}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3.64}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{0.36}}{2} = \frac{2 \pm 0.6}{2} = \begin{cases} 1.3 \\ 0.7 \end{cases}$$

Egenverdier $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 0.7$.

Finner en egenvektor til λ_1:

$$\vec{0} = (A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.2 & 1.1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 0.7$

dvs

$$-0.4x + 0.4y = 0 \Rightarrow x = y, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$0.2x - 0.2y = 0 \Rightarrow x = y$$

Finner en egenvektor for λ_2

$$\vec{0} = (A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dvs

$$0.2x + 0.4y = 0 \Rightarrow 0.2x = -0.4y \Rightarrow x = -2y$$
$$0.2x + 0.4y = 0 \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppsummering: $\lambda_1 = 1.3$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 0.7$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Storby: x_n befolkning n tiår inn i fremtiden

Omliggende områder: y_n ——1.1——

$x_0 = 6$ millioner

$y_0 = 3$ millioner

Modell:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.9x_n + 0.4y_n \\ y_{n+1} &= 0.2x_n + 1.1y_n \end{aligned}\right\} \leftarrow$$

Finn ut hvor mange som vil bo hvert sted om n tiår.

La $\vec{r}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, da er

$$\vec{r}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.2 & 1.1 \end{bmatrix} \vec{r}_n = A\vec{r}_n.$$

Altså er $\vec{r}_1 = A\vec{r}_0$, $\vec{r}_2 = A\vec{r}_1 = A^2\vec{r}_0$, ..., $\vec{r}_n = A^n\vec{r}_0$

Uttrykker startvektoren $\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ ved hjelp av egenvektorene til A, dvs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ x + y \end{bmatrix}$$

Løser $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 6 \\ x + y &= 3 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x - 2y &= 6 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}\right\} 3x = 12 \Rightarrow x = 4$, $y = -1$

Altså

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs

$$\vec{r}_0 = 4\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Dermed

$$A^n\vec{r}_0 = A^n(4\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 4A^n\vec{v}_1 - A^n\vec{v}_2$$
$$= 4\lambda_1^n\vec{v}_1 - \lambda_2^n\vec{v}_2$$

$$4 \cdot 1.3^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.7^n \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \cdot 1.3^n + 2 \cdot 0.7^n \\ 4 \cdot 1.3^n - 0.7^n \end{bmatrix}$$

dvs

$$x_n = 4 \cdot 1.3^n + 2 \cdot 0.7^n \quad (0.7^n \to 0)$$
$$y_n = 4 \cdot 1.3^n - 0.7^n \quad (0.7^n \to 0)$$

Vekst: 1.3 — størst egenverdi

Fordeling $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — tilhørende egenvektor

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{4 \cdot 1.3^n + 2 \cdot 0.7^n}{4 \cdot 1.3^n - 0.7^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1.3^n\left[4 + 2\frac{0.7^n}{1.3^n}\right]}{1.3^n\left[4 - 0.7^n\right]} = \frac{4}{4} = 1$$

Linearare rum / vektorrum

Hva gjör vi när vi regnar med vektorer?

Lägger dem samman: $\vec{u} + \vec{v}$

Gånger med skalar/tall: $a\vec{u}$

Många andra objekten kan vi göra nåt liknande med:

1. Matriser av samma storlek: $A + B$, $c(A+B)$
2. Följe av tall: $\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$

$$\{y_n\} = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$$

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_0+y_0, x_1+y_1, x_2+y_2, \dots\}$$

$$c\{x_n\} = \{cx_0, cx_1, \dots\}$$

3. Funktioner: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) = af(x)$$

Sörer: En teori för objekter som kan läggas samman och multiplikeras med tall på ett förnuftigt sätt.

Flers regneregler.

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

$$\vdots$$

regneregler.

Aksiomer for vektorrom

Definisjon: Et vektorrom er en ikke-tom mengde V som er utstyrt med to operasjoner som fungerer slik.

a) Addisjon som til hvert par av elementer $\vec{x}, \vec{y} \in V$ gir oss en sum $\vec{x}+\vec{y} \in V$.

b) Multiplikasjon med skalar som til hver $a \in \mathbb{R}$ og hver $\vec{x} \in V$ gir oss et element $a\vec{x} \in V$.

I tillegg må disse reglene være oppfylt:

(i) **Assosiativitet for addisjon:**
$\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) = (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$ for alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$. ✓

(ii) **Kommutativitet for addisjon**
$\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$ for alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$. ✓

(iii) Det finnes et element $\vec{0} \in V$ slik at
$\vec{x}+\vec{0} = \vec{x}$ for alle $\vec{x} \in V$. } $0\vec{u} = \vec{0}$

(iv) For hver $\vec{x} \in V$ finnes det et element $-\vec{x}$ slik at
$\vec{x}+(-\vec{x}) = \vec{0}$ $-\vec{x} = (-1)\vec{x} \in u$

(v) Assosiativitet av multiplikasjon med skalar:
$a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$ for alle $a, b \in \mathbb{R}$ og alle $\vec{x} \in V$. ✓

(vi) $1\vec{x} = \vec{x}$ (1 er nøytral) ✓

(vii) Distributive lover: $a(\vec{x}+\vec{y}) = a\vec{x}+a\vec{y}$ for alle $a, b \in \mathbb{R}$ og alle
$(a+b)\vec{x} = a\vec{x}+b\vec{x}$ $\vec{x}, \vec{y} \in V$. ✓

Eksempler: (i): $\mathbb{R}^n$ med vanlige regneoperasjoner er vektorrom.

(ii) V = mengden av $m \times n$-matriser er et vektorrom

(iii) V = mengden av alle funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ er også et vektorrom.

Nullelement: $f(x) = 0$ for alle x.

Motsatt element til f: $(-f)(x) = -f(x)$

Regler som mangler (?):

I **Forkorting:** $\vec{u}+\vec{x} = \vec{v}+\vec{x} \overset{?}{\Longrightarrow} \vec{u} = \vec{v}$ JA!

II Kan det finnes flere ombytte elementer $x+(-x) = c$? NEI!

III Er $0\vec{x} = \vec{0}$? JA!

IV Er $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$? JA!

Bevis for forkorting: Anta at $\vec{u}+\vec{x} = \vec{v}+\vec{x}$. Vi skal vise at da er $\vec{u} = \vec{v}$.

Legger til $(-x)$ på begge sider

$$(\vec{u}+\vec{x})+(-\vec{x}) = (\vec{v}+\vec{x})+(-\vec{x})$$

assosiativ:
$$\vec{u}+\underbrace{(\vec{x}+(-\vec{x}))}_{0} = \vec{v}+\underbrace{(\vec{x}+(-\vec{x}))}_{0}$$

$$\vec{u}+\vec{0} = \vec{v}+\vec{0}$$

$$\vec{u} = \vec{v}.$$

Har også at $\vec{x}+\vec{u} = \vec{x}+\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$.

$\parallel$

$\vec{u}+\vec{x} = \vec{v}+\vec{x}$

$\Downarrow$

$\vec{u} = \vec{v}$.

II: Kan det være elementer slik at $\vec{x}+\vec{u} = \vec{0}$
$\vec{x}+\vec{v} = \vec{0}$

Nei, for da er
$\vec{x}+\vec{u} = \vec{x}+\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$.

III Er $0\vec{x} = \vec{0}$?

$$\vec{x}+0\vec{x} = 1\vec{x}+0\vec{x} = \underbrace{(1+0)}_{\text{tall}}\vec{x} = 1\cdot\vec{x} = \vec{x} = \vec{x}+\vec{0}$$

Dermed er
$$\cancel{\vec{x}}+0\vec{x} = \cancel{\vec{x}}+\vec{0}$$

$$0\vec{x} = \vec{0}$$

(IV) Er $(-1)\vec{x}$ lik $-x$? Hva er $-x$, jo, det er det unike elementet slik at $\vec{x}+(-\vec{x}) = 0$. Det holder derfor å vise at $\vec{x}+(-1)\vec{x} = \vec{0}$. Men

$$\vec{x}+(-1)\vec{x} = 1\vec{x}+(-1)\vec{x} = \underbrace{(1+(-1))}_{0}\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$$

Teorem: Anta at V er et vektorrom og at U er en ikke-tom delmengde av V. Dersom

(i) For alle $\vec{u}, \vec{v} \in U$, så er $\vec{u} + \vec{v} \in U$.
(ii) For alle $\vec{u} \in U$ og $a \in \mathbb{R}$, så er $a\vec{u} \in U$.



Da er U også et vektorrom, et såkalt underrom av V.

Bevis. Må sjekke at U tilfredsstiller (i) - (viii)
Kravene viser at addisjon og skalarmultiplikasjon er aparoperasjoner.
... Så at (i) - (viii) holder.