Oppgaver i MAT1080, H25

Oppgave 1. (10 poeng) Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 2 \\ 2x + y - 3z &= 1 \\ -x + 4y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

Oppgave 2. Løs integralene

a) (10 poeng)

$$\int_0^2 x^2 e^{x^3}\, dx$$

b) (10 poeng)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på funksjonen

$$f(x, y) = x^2 y - 2xy + \frac{1}{2}y^2.$$

a) (10 poeng) Finn de første- og annenordens partiellderiverte til f.

b) (10 poeng) Finn de stasjonære punktene til f.

c) (10 poeng) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter eller lokale maksimumspunkter.

Oppgave 4.

a) (10 poeng) Skriv $\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) (10 poeng) Finn egenverdiene til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1.3 & -0.4 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

c) (10 poeng) Finn egenvektorene til M.

To dyreslag, et byttedyr og et rovdyr, lever i det samme området. Dersom det i år n er x_n byttedyr og y_n rovdyr i området, regner forskerne med at det året etter vil være $x_{n+1} = 1.3x_n - 0.4y_n$ byttedyr og $y_{n+1} = 0.1x_n + 0.8y_n$ rovdyr der.

d) (10 poeng) Anta at det i år 0 er 1000 byttedyr og 100 rovdyr i området. Hvor mange dyr er det av hvert slag etter n år? Hvordan går det med fordelingen mellom byttedyr og rovdyr når n går mot ∞?

e) (10 poeng) Anta isteden at det i år 0 er 1000 byttedyr og 1000 rovdyr i området. Hvordan går det nå med bestandene når n går mot ∞?

Oppgave 5. (10 poeng) To $n \times n$-matriser A og B kalles *similære* hvis det finnes en inverterbar $n \times n$-matrise M slik at $A = M^{-1}BM$. Vis at hvis A og B er similære, så er $\det(A) = \det(B)$.

Vis også at hvis A og B er similære, så har de det samme karakteristiske polynomet, dvs. at $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$. (*Hint:* Det kan lønne seg først å vise at $I = M^{-1}IM$.)

SLUTT