Løsningsforslag til kontinuasjonseksamen i MAT1080, H25

Oppgave 1. a) Vi bruker L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2(2x)}\cdot 2}{1} = 2.$$

b) Vi bruker L'Hôpitals regel to ganger:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-3x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{2} = \frac{9}{2}.$$

Oppgave 2. a) Vi bruker delvis integrasjon med $u = x$, $v' = \cos(2x)$. Da er $u' = 1$ of $v = \frac{1}{2}\sin(2x)$, og vi får:

$$\int_0^\pi x\cos(2x)\,dx = \left[x\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$$

$$= \left[0-0\right] + \left[\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^\pi = 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

b) Vi bruker substitusjon og setter $u = \sin x$ (det fungerer nesten like greit å sette $u = \cos x$) og får $du = \cos x\,dx$. De nye grensene er $u(0) = \sin 0 = 0$ og $u(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, og dermed får vi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\sin x\,dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Oppgave 3. a) Vi bruker produktregelen og får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{x+y} + (3x+y^3)e^{x+y} = (3+3x+y^3)e^{x+y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2e^{x+y} + (3x+y^3)e^{x+y} = (3y^2+3x+y^3)e^{x+y}.$$

b) For å finne de stasjonære punktene må vi løse ligningssettet

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = (3+3x+y^3)e^{x+y}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = (3y^2+3x+y^3)e^{x+y}.$$

Siden e^{x+y} aldri er null, kan vi forenkle dette til

$$3+3x+y^3 = 0$$

$$3y^2+3x+y^3 = 0.$$

Fra den første ligningen får vi $3x = -y^3 - 3$, og setter vi dette inn i den nederste, får vi

$$3y^2 - 3 = 0$$

som er ekvivalent med $y^2 = 1$. Dette gir $y = \pm 1$. Setter vi $y = 1$ inn i ligningen $3 + 3x + y^3 = 0$, får vi $x = -\frac{4}{3}$. Setter vi isteden inn $y = -1$, får vi $x = -\frac{2}{3}$.

Dette betyr at vi har to stasjonære punkter, $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ og $\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$.

c) Bruker vi produktregelen til å derivere de førsteordens partiellderiverte i a), får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 3e^{x+y} + (3 + 3x + y^3)e^{x+y} = (6 + 3x + y^3)e^{x+y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3y^2 e^{x+y} + (3 + 3x + y^3)e^{x+y} \\
&= (3y^2 + 3 + 3x + y^3)e^{x+y} = (y^3 + 3y^2 + 3x + 3)e^{x+y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (6y + 3y^2)e^{x+y} + (3y^2 + 3x + y^3)e^{x+y} \\
&= (y^3 + 6y^2 + 6y + 3x)e^{x+y}.
\end{aligned}$$

For å undersøke hva slags stasjonære punkter vi har, bruker vi annenderiverttesten. Vi tar ett punkt om gangen og begynner med $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ der vi har

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{4}{3}, 1\right) = \left(6 + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 1^3\right) e^{-4/3+1} = 3e^{-1/3}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-\frac{4}{3}, 1\right) = \left(1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) + 3\right) e^{-4/3+1} = 3e^{-1/3}$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{4}{3}, 1\right) = \left(1^3 + 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 3\left(-\frac{4}{3}\right)\right) e^{-4/3+1} = 9e^{-1/3}.$$

Hesse-determinanten er dermed

$$D = AC - B^2 = 3e^{-1/3} \cdot 9e^{-1/3} - \left(3e^{-1/3}\right)^2 = 18e^{-2/3} > 0.$$

Siden D er positiv, er $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum, og siden $A > 0$, er det et lokalt minimum.

Vi ser nå på punktet $\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$ der vi har

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{2}{3}, -1\right) = \left(6 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + (-1)^3\right) e^{-2/3-1} = 3e^{-5/3}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-\frac{2}{3}, -1\right) = \left((-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3\left(-\frac{2}{3}\right) + 3\right) e^{-2/3-1} = 3e^{-5/3}$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{2}{3}, -1\right) = \left((-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1) + 3\left(-\frac{2}{3}\right)\right)e^{-2/3-1} = -3e^{-5/3}.$$

Hesse-determinanten er dermed

$$D = AC - B^2 = 3e^{-5/3}\cdot\left(-3e^{-5/3}\right) - \left(3e^{-5/3}\right)^2 = -18e^{-10/3} > 0,$$

som viser at $\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$ er et sadelpunkt.

Oppgave 4. a) Vi må finne tall x, y slik at

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir ligningene

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 10 \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

Ganger vi den nederste ligningen med 2 og legger resultatet til den øverste, får vi $4x = 12$, som gir $x = 3$. Innsatt i den andre ligningen gir dette $y = -2$. Vi har altså

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Vi må løse den karakteristiske ligningen

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.9-\lambda & 0.4 \\ 0.1 & 0.9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 0.9)^2 - 0.04.$$

Dette betyr at $(\lambda - 0.9)^2 = 0.04$, og følgelig er $(\lambda - 0.9) = \pm 0.2$, som gir egenverdiene $\lambda_1 = 1.1$ og $\lambda_2 = 0.7$.

c) Vi finner egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ til henholdsvis λ_1 og λ_2:

Egenvektor til λ_1: Vi må finne en ikke-null vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{0} = (M - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2x + 0.4y \\ 0.1x - 0.2y \end{bmatrix}.$$

Denne ligningen er oppfylt når $x = 2y$, og velger vi $y = 1$, får vi $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenvektor til λ_2: Vi må finne en ikke-null vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{0} = (M - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2x + 0.4y \\ 0.1x + 0.2y \end{bmatrix}.$$

Denne ligningen er oppfylt når $x = -2y$, og velger vi $y = 1$, får vi $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Vi ser at $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ og dermed er $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Fra punkt a) har vi at

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2,$$

og dermed får vi

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n(3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2) = 3\lambda_1^n \mathbf{v}_1 - 2\lambda_2^n \mathbf{v}_2$$

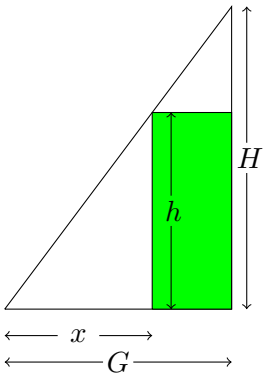
$$= 3 \cdot 1.1^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot 0.7^n \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 1.1^n + 4 \cdot 0.7^n \\ 3 \cdot 1.1^n - 2 \cdot 0.7^n \end{bmatrix},$$

der x_n og y_n angir hvor mange millioner kunder selskapene har. Når n går mot uendelig, har vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 \cdot 1.1^n + 4 \cdot 0.7^n}{3 \cdot 1.1^n - 2 \cdot 0.7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 + 4 \cdot \frac{0.7^n}{1.1^n}}{3 - 2 \cdot \frac{0.7^n}{1.1^n}} = \frac{6}{3} = 2.$$

I det lange løp vil altså selskap X ha dobbelt så mange kunder som selskap Y.

Oppgave 5. Det er flere måter å gå frem på, men den mest naturlige er kanskje som følger. Vi kaller høyden i trekanten H og grunnlinjen G. Videre kaller vi høyden i rektangelet h og lar x være som på figuren.



Sammenligner vi formlike trekanter, ser vi at

$$\frac{h}{x} = \frac{H}{G},$$

som gir $h = \frac{H}{G}x$. Grunnlinjen til rektangelet er $g = G - x$, og arealet er dermed

$$A(x) = gh = (G - x) \cdot \frac{H}{G}x = \frac{H}{G}x(G - x) = \frac{H}{G}(Gx - x^2),$$

for $0 \leq x \leq G$. Vi deriverer og får

$$A'(x) = \frac{H}{G}(G - 2x).$$

Dette uttrykket er null når $x = \frac{G}{2}$, og siden fortegnet skifter fra positivt til negativt, er $x = \frac{G}{2}$ et lokalt maksimumspunkt (det eneste).

Det maksimale arealet til rektangelet er derfor

$$A(G/2) = \frac{H}{G}\frac{G}{2}\left(G - \frac{G}{2}\right) = \frac{HG}{4}.$$

Siden arealet av trekanten er $\frac{HG}{2}$, viser dette påstanden.

SLUTT