Løsningsforslag til eksamen i MAT1080, H25

Oppgave 1. Vi radreduserer den utvidede matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 4 \end{bmatrix} \overset{II-2I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{III+I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \overset{III+2II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Setter vi inn igjen variablene, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 2 \\ -3y + 3z &= -3 \\ 0z &= 0 \end{aligned}$$

Fra den nederste ligningen ser vi at z kan velges fritt. Fra den midterste ligningen får vi at $y = z + 1$, og fra den øverste ligningen får vi dermed at $x = 2 - 2y + 3z = 2 - 2(z + 1) + 3z = z$.

Oppgave 2. a) Vi substituerer $u = x^3$ og får $du = 3x^2\,dx$. Dette gir $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$, og dermed er

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \int \frac{1}{3} e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

Vi setter inn grensene og får

$$\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}\left(e^8 - 1\right)$$

b) Vi substituerer $u = \sin x$, og observerer at $du = \cos x\,dx$. Dermed er

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

Setter vi inn grensene, får vi

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \Big[\ln|\sin x|\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Oppgave 3. a) Vi har førstederiverte

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy - 2y = 2y(x-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 - 2x + y \end{aligned}$$

og annenderiverte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x - 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

b) For å finne de stasjonære punktene må vi løse ligningssystemet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y(x-1) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x + y = 0$$

Den første ligningen har løsningene $y = 0$ og $x = 1$. Setter vi $y = 0$ inn i den andre ligningen, får vi $x^2 - 2x = 0$, som har løsningene $x = 0$ og $x = 2$. Dette gir de stasjonære punktene $(0, 0)$ og $(2, 0)$. Setter vi isteden $x = 1$ inn i den andre ligningen, får vi $1^2 - 2 \cdot 1 + y = 0$, som gir $y = 1$. Dette gir et tredje stasjonært punkt $(1, 1)$. De stasjonære punktene er altså $(0, 0)$, $(2, 0)$ og $(1, 1)$.

c) Hesse-determinanten i et generelt punkt er

$$Hf(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2y \cdot 1 - (2x-2)^2 = 2y - 4(x-1)^2$$

Vi sjekker de stasjonære punktene:

Punktet $(0, 0)$: Vi har $Hf(0, 0) = 2 \cdot 0 - 4(-1)^2 = -4 < 0$, så $(0, 0)$ er et sadelpunkt.

Punktet $(2, 0)$: Vi har $Hf(2, 0) = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1^2 = -4 < 0$, så $(2, 0)$ er et sadelpunkt.

Punktet $(1, 1)$: Vi har $Hf(1, 1) = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0^2 = 2 > 0$, så $(1, 1)$ er enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum. Siden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 2 \cdot 1 = 2 > 0$, er $(1, 1)$ et lokalt minimum..

Oppgave 4. a) Vi må finne tall x, y slik at

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette gir ligningene

$$4x + y = 10$$
$$x + y = 1$$

Trekker vi den nederste ligningen fra den øverste, får vi $3x = 9$ som gir $x = 3$. Innsatt i den andre ligningen gir dette $y = -2$. Vi har altså

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Vi må løse den karakteristiske ligningen

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1.3 - \lambda & -0.4 \\ 0.1 & 0.8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2.1\lambda + 1.08$$

Vi får

$$\lambda = \frac{-(-2.1) \pm \sqrt{(-2.1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1.08}}{2} = \frac{2.1 \pm \sqrt{0.09}}{2} = \frac{2.1 \pm 0.3}{2} = \begin{cases} 1.2 \\ \\ 0.9 \end{cases}$$

Egenverdiene er dermed $\lambda_1 = 1.2$ og $\lambda_2 = 0.9$.

c) Vi finner egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ til henholdsvis λ_1 og λ_2:
Egenvektor til λ_1: Vi må finne en ikke-null vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{0} = (M - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.4 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1x - 0.4y \\ 0.1x - 0.4y \end{bmatrix}.$$

Denne ligningen er oppfylt når $x = 4y$, og velger vi $y = 1$, får vi $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenvektor til λ_2: Vi må finne en ikke-null vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{0} = (M - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4x - 0.4y \\ 0.1x - 0.1y \end{bmatrix}.$$

Denne ligningen er oppfylt når $x = y$, og velger vi $y = 1$, får vi $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Vi ser at $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ og dermed er $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.
Fra punkt a) har vi at

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix} = 300 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - 200 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 300\mathbf{v}_1 - 200\mathbf{v}_2,$$

og dermed får vi

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n(300\mathbf{v}_1 - 200\mathbf{v}_2) = 300\lambda_1^n\mathbf{v}_1 - 200\lambda_2^n\mathbf{v}_2$$

$$= 300 \cdot 1.2^n \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - 200 \cdot 0.9^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 \cdot 1.2^n - 200 \cdot 0.9^n \\ 300 \cdot 1.2^n - 200 \cdot 0.9^n \end{bmatrix}$$

Når n går mot uendelig, har vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1200 \cdot 1.2^n - 200 \cdot 0.9^n}{300 \cdot 1.2^n - 200 \cdot 0.9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1200 - 200 \cdot \frac{0.9^n}{1.2^n}}{300 - 200 \cdot \frac{0.9^n}{1.2^n}} = \frac{1200}{300} = 4.$$

I det lange løp er det altså 4 ganger så mange byttedyr som rovdyr.

e) Vi har nå begynnelsestilstanden $\begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{bmatrix} = 1000\mathbf{v}_2$, og dermed er

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = 1000M^n\mathbf{v}_2 = 1000 \cdot \lambda_2^n\mathbf{v}_2 = 1000 \cdot 0.9^n\mathbf{v}_2.$$

Siden dette uttrykket går mot 0 når n går mot uendelig, vil begge bestandene dø gradvis ut i dette tilfellet.

Oppgave 5. Bruker vi regelen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ to ganger, får vi

$$\det(A) = \det(M^{-1}BM) = \det(M^{-1})\det(B)\det(M) = \det(B)$$

der vi også har brukt at $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

For den andre delen observerer vi først at siden $IM = M$, så er $M^{-1}IM = M^{-1}M = I$. Dermed er

$$\det(A - \lambda I) = \det(M^{-1}BM - \lambda M^{-1}IM) = \det(M^{-1}(B - \lambda I)M).$$

Ved det samme argumentet som ovenfor får vi nå

$$\det(A - \lambda I) = \det(M^{-1})\det(B - \lambda I)\det(M) = \det(B - \lambda I).$$

SLUTT