MAT1080 H25
Oscar Brovold

Løsningsforslag kapittel 1

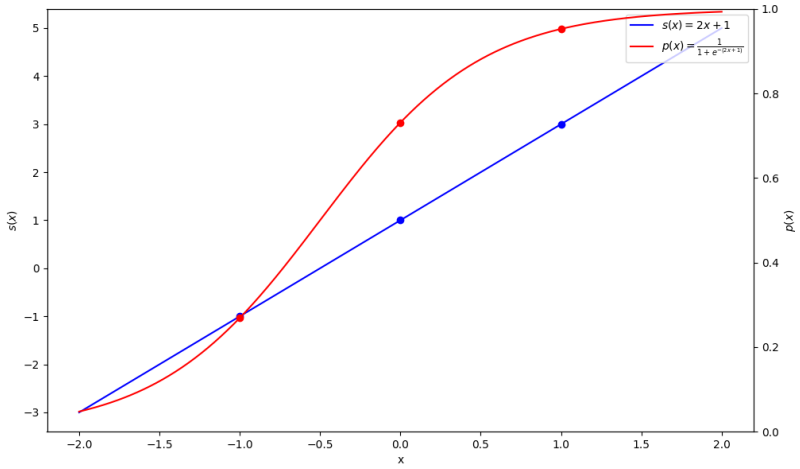
Oppgaver relatert til maskinlæring

Oppgave 5a

La $s(x) = 2x + 1$ og $p(x) = \frac{1}{1+e^{-s(x)}}$.[1] For $x \in \{-1, 0, 1\}$ får vi tabellen nedenfor:

x	$s(x) = 2x + 1$	$p(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-s(x)}}$
-1	-1	$\frac{1}{1+e^{1}} \approx 0.269$
0	1	$\frac{1}{1+e^{-1}} \approx 0.731$
1	3	$\frac{1}{1+e^{-3}} \approx 0.953$

[1] Sigmoidfunksjonen ($p(x)$ eller ofte også $\sigma(x)$) er mye brukt i maskinlæring. Den komprimerer input til $(0, 1)$ og er strengt voksende. Den brukes ofte som en aktiveringsfunksjon og for å tolke utdata som sannsynligheter (I oppgave 6 viser vi at $0 < p(x) < 1$).



Figur 1: Graf av $s(x) = 2x + 1$ og $p(x) = \frac{1}{1+e^{-s(x)}}$ med markerte punkter $x \in \{-1, 0, 1\}$.

Oppgave 5b

I oppgave b) skal vi vise at $p(x)$ er voksende i hele sitt definisjonsområde, altså for alle reelle tall. Oppgaven kan løses ved å bruke definisjon 1.1.2 fra kompendiet, som ikke krever derivasjon.

Vi kan også angripe oppgaven mer analytisk ved å se på den deriverte til $p(x)$.[2] Ved bruk av kjerneregelen og kvotientregelen får vi:

[2] I kapittel 2 lærer vi mer om den deriverte, og teknikker for å finne den deriverte.

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-s(x)}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{s(x)}}{1+e^{s(x)}}\right) \\
&= \frac{(e^{s(x)})'(1+e^{s(x)}) - e^{s(x)}(1+e^{s(x)})'}{(1+e^{s(x)})^2} \\
&= \frac{s'(x)\,e^{s(x)}\,\left(1+e^{s(x)}\right) - s'(x)\,e^{s(x)}\,e^{s(x)}}{\left(1+e^{s(x)}\right)^2} \\
&= s'(x)\,\frac{e^{s(x)}}{\left(1+e^{s(x)}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Herfra ser vi at $p'(x) = s'(x)\frac{e^{s(x)}}{(1+e^{s(x)})^2} > 0$, siden $s'(x) = 2 > 0$, $e^{s(x)} > 0$ og $(1+e^{s(x)})^2 > 0$. Dermed er p strengt voksende. Dette kan også tydelig observeres i figur 1 over, hvor sigmoidkurven vokser jevnt med økende x.

Oppgave 5c

Vi skal finne x slik at $p(x) = \frac{1}{2}$. Altså har vi:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^{-s(x)}} = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; 1+e^{-s(x)} = 2 \;\Rightarrow\; e^{-s(x)} = 1 \\
\Rightarrow\; s(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x+1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 6a

Vi skal i denne oppgaven vise at $0 < p(x) = \frac{1}{1+e^{-s(x)}} < 1$. Vi starter med å argumentere for at nevneren er > 1.

For alle reelle tall er $e^t > 0$. Setter vi $t = -s(x)$ har vi $e^{-s(x)} > 0$ som betyr at $1 + e^{-s(x)} > 1$.

Oppgave 6b

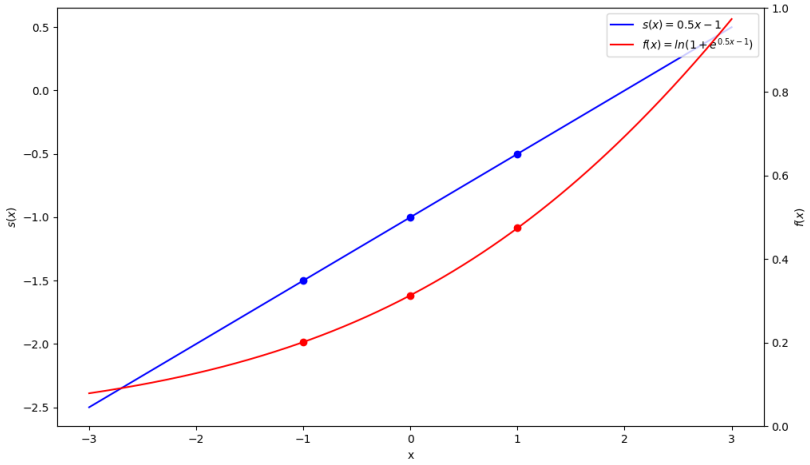
Siden telleren alltid er positiv og nevneren $1 + e^{-s(x)} > 1$ har vi altså at $0 < p(x) < 1$.

Merknad: $p(x)$ når aldri 0 eller 1, men $p(x) \to 0$ når $s(x) \to -\infty$ og $p(x) \to 1$ når $s(x) \to \infty$.

Oppgave 7a

La $s(x) = \frac{1}{2}x - 1$ og $f(x) = \ln(1 + e^{s(x)})$. For $x \in \{-1, 0, 1\}$ får vi tabellen nedenfor:

x	$s(x) = \frac{1}{2}x - 1$	$f(x) = \ln\left(1 + e^{s(x)}\right)$
-1	$-\frac{3}{2}$	$\ln(1 + e^{-3/2}) \approx 0.201$
0	-1	$\ln(1 + e^{-1}) \approx 0.313$
1	$-\frac{1}{2}$	$\ln(1 + e^{-1/2}) \approx 0.474$



Figur 2: Graf av $s(x) = \frac{1}{2}x - 1$ og $f(x) = \ln(1 + e^{s(x)})$ med markerte punkter $x \in \{-1, 0, 1\}$.

Oppgave 7b

I oppgave b) skal vi vise at $f(x)$ er voksende i hele sitt definisjonsområde, altså for alle reelle tall. Oppgaven kan løses ved å bruke definisjon 1.1.2 fra kompendiet, som ikke krever derivasjon.

Vi kan her også løse oppgaven mer analytisk med derivasjon. Vi har:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+e^{s(x)}} s'(x) e^{s(x)} \\ &= s'(x) \frac{e^{s(x)}}{1+e^{s(x)}} = s'(x)\sigma(s(x)) \end{aligned}$$

Vi har altså at $f'(x) = s'(x)\sigma(s(x))$.[3] Siden $s'(x) > 0$ og $0 < \sigma(s(x)) < 1$ så har vi at $f'(x) > 0$ og dermed at $f(x)$ er en strengt voksende funksjon.

[3] $\sigma(s(x))$ er her en sigmoidfunksjon, slik vi jobbet med i oppgave 5.

Oppgave 7c

Vi skal finne x slik at $f(x) = \ln 2$. Siden $f(x) = \ln(1+e^{s(x)})$ og $s(x) = \frac{1}{2}x - 1$, får vi

$$\begin{aligned} \ln\left(1+e^{s(x)}\right) = \ln 2 &\Rightarrow 1 + e^{s(x)} = 2 \Rightarrow e^{s(x)} = 1 \\ &\Rightarrow s(x) = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2. \end{aligned}$$