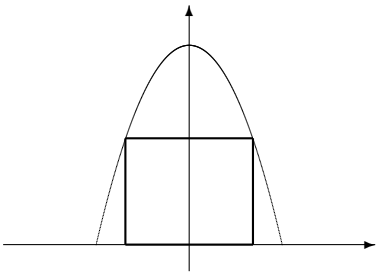
# MAT1080: Ekstraoppgaver til kapittel 2

### Uoppstilte maks/min-oppgaver

**Oppgave 1.** En eske skal ha kvadratisk bunn, men ingen topp. Volumet til esken skal være 4 $\mathrm{dm}^3$. Hvor høy må esken være for at overflatearealet (bunn+sidevegger) skal bli minst mulig?

**Oppgave 2.** En fabrikk produserer sylinderformede blikkbokser. Materialet som brukes i den krumme sideflaten er dobbelt så dyrt som det som brukes i bunn- og toppflaten. Boksene skal ha et volum på 1 $\mathrm{dm}^3$ og fabrikken ønsker å lage dem så billig som mulig. Hvor stor skal høyden og radien være?

**Oppgave 3.** Figuren nedenfor viser parabelen $f(x) = 12 - x^2$ og et rektangel som ligger under funksjonsgrafen og over $x$-aksen. Hva er det største arealet et slikt rektangel kan ha?



**Oppgave 4.** En speilprodusent planlegger å starte produksjonen av en ny serie. De nye speilene skal ha et areal på $1\,\mathrm{m}^2$ og være formet som et rektangel med en halvsirkel i høyre og venstre ende (se figur). Rundt hele speilet skal det være en ramme, og den krumme delen av rammen er dobbelt så dyr per centimeter som den rette delen. Hvor stor må radius i halvsirklene være for at rammen skal bli så billig som mulig?

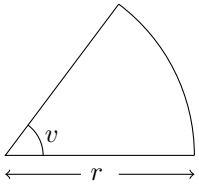


Et speil

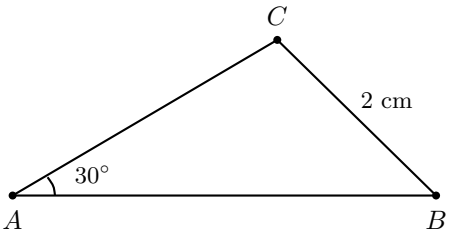
**Oppgave 5.** Hva er volumet til den største sylinderen som kan plasseres inni en kule med radius $R$?

**Oppgave 6.** En bil bruker $2 + 0.08v^2$ liter bensin per time når den kjører med en fart av $v$ mil per time. Ved hvilken hastighet bruker bilen minst bensin per mil, og hva er forbruket da?

**Oppgave 7.** Du skal lage en sirkelsektor med et gitt areal $A$ (se figur). Hvordan skal du velge vinkelen $v$ for at omkretsen til sirkelsektoren skal bli minst mulig? (Husk at arealet til en sirkelsektor er $A = \frac{1}{2}r^2v$ og at buelengden er $b = rv$.)




**Oppgave 8.** I en trekant $ABC$ er $\angle A = 30°$. Siden $BC$ er 2 cm. Hva er det lengste siden $AB$ kan være?




### Oppgaver om Newtons metode

I oppgavene nedenfor skal du finne en tilnærmet verdi for nullpunktet som funksjonen har i det angitte intervallet. La $x_0$ være midtpunktet i intervallet og bruk Newtons metode to ganger. Bruk gjerne en kalkulator eller et dataprogram til å utføre regningene.

**Oppgave 9.** $f(x) = x^5 + 3x - 7$ på $[1, 2]$.

**Oppgave 10.** $f(x) = \tan x + x - 1$ på $[0, \pi/2]$.

**Oppgave 11.** $f(x) = \ln x + x$ på $[0, 1]$.

**Oppgave 12.** $f(x) = e^x - 4x$ på $[0, 1]$.

### Maks/min-oppgaver for funksjoner av flere variable

**Oppgave 13.** Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$
b) $f(x, y) = x^2y^2 - 4xy + 6x - 6y$
c) $f(x, y) = e^{x^2+3y^2}$
d) $f(x, y) = \frac{1}{1-x+y+x^2+y^2}$
e) $f(x, y) = x + \ln(x^2 + y^2)$

**Oppgave 14.** Finn det stasjonære punktet til funksjonen

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 6y$$

og avgjør om det er et lokalt maksimumspunkt, minimimumspunkt eller sadelpunkt.

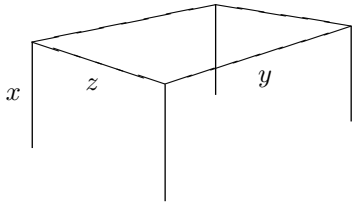
**Oppgave 15.** Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = (x + y^2)e^x$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

**Oppgave 16.** Du skal lage en boks med volum $V$. Boksen skal ha bunn og fire sideflater, men ingen topp. Hvordan skal du lage boksen for at overflatearealet skal bli minst mulig?

**Oppgave 17.** Du skal lage en ramme av stålrør som skal brukes som reisverk til et telt. Rammen består av fire bein med lengde $x$ festet til et rektangel med sider $y$ og $z$, se figur under. Lengdene $x, y$ og $z$ måles i meter.




Volumet $V = xyz$ av teltet skal være 500 m$^3$. Din oppgave er å lage teltet slik at den totale lengden $L$ av stålrør som går med blir minst mulig.

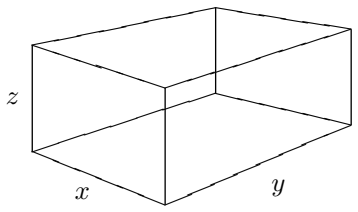
a) Begrunn at lengden $L$ kan skrives som

$$L(x, y) = 4x + 2y + \frac{1000}{xy}$$

og finn de partiellderiverte $\frac{\partial L}{\partial x}$ og $\frac{\partial L}{\partial y}$.

b) Bestem de dimensjonene av teltet som gjør totallengden av stålrør minst mulig.

**Oppgave 18.** Vi skal bygge en rettvinklet kasse uten lokk, se figur nedenfor. Kassen skal ha sidelengder $x$ og $y$ og høyde $z$. Selve "skjelettet" til kassen skal lages av 12 tynne rør (markert med streker på figuren). Den totale lengden rør vi skal benytte er 56 meter.




a) Begrunn at arealet $A$ av kassens utside (de fire veggene pluss bunnen) som funksjon av $x$ og $y$ kan skrives

$$A(x, y) = 28x + 28y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy$$

og finn de partiellderiverte av $A$. Bestem deretter eventuelle punkter $(x, y)$ der begge de partiellderiverte er null, og avgjør om disse punktene er lokale minimumspunkter for $A$, lokale maksimumspunkter for $A$ eller ingen av delene.

b) Finn maksimumsverdien for $A(x, y)$ på området i $xy$-planet gitt ved $0 \leq x \leq 14$, $0 \leq y \leq 14$. Hvordan bør sidelengdene $x$ og $y$ velges for at arealet av kassens utside skal bli størst mulig?

**Oppgave 19.** Oslo kommune planlegger å bygge et akvarium med volum 5000 $\text{m}^3$. Kostnadene er gitt ved:

Fronten – en glassplate: 1000 kr. per $\text{m}^2$.

Sidekantene – 3 stk. i stål: 300 kr. per $\text{m}^2$

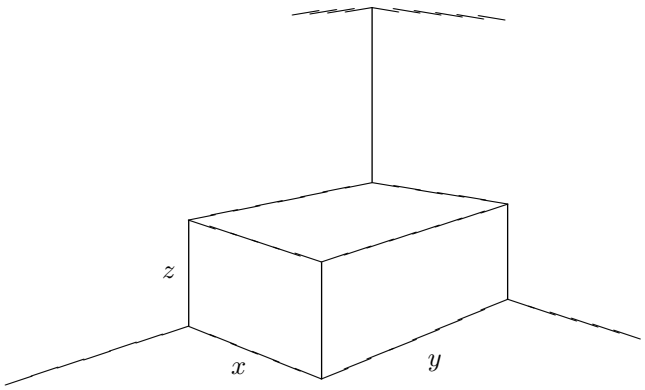
Bunnen – i sement: 500 kr. per $\text{m}^2$

Anta glassplaten har lengde $l$ og høyde $h$. Forklar hvorfor materialene koster

$$f(l, h) = 100\left(13lh + \frac{30000}{l} + \frac{25000}{h}\right)$$

Finn $l$ og $h$ som minimaliserer materialkostnadene.

**Oppgave 20.** Et baderom har takhøyde 3 m og et kvadratisk gulv som er 4 $\text{m}^2$. I dette rommet skal vi plassere et badekar av lengde $x$, bredde $y$ og høyde $z$ (målt i meter) og med volum $xyz = \frac{2}{3}$ $\text{m}^3$. Badekaret skal plasseres i det ene hjørnet av baderommet som vist på tegningen.




Ut i fra dimensjonene på rommet og karet får vi: $0 < x \leq 2$, $0 < y \leq 2$, $0 < z \leq 3$ (og derfor også $xy = \frac{2}{3z} \geq \frac{2}{9}$ $(\text{m})^2$). Vi skal flislegge de to veggene badekaret berører, samt badegulvet, men vi flislegger bare de delene av veggene og gulvet som badekaret ikke dekker. Vi bruker to forskjellige typer fliser til vegger og gulv. Prisen på veggflisene er 90 kr/$\text{m}^2$ og på gulvflisene 60 kr/$\text{m}^2$. La $P(x, y)$ betegne totalprisen på flisene som funksjon av $x$ og $y$ angitt i kr.

a) Vis at vi får $P(x, y) = 1320 - \frac{60}{x} - \frac{60}{y} - 60xy$, og beregn $\frac{\partial P}{\partial x}$ og $\frac{\partial P}{\partial y}$.

b) For å få oversikt over utgiftene til flisleggingen ønsker vi å finne den verdien av $(x, y)$ som gjør at $P(x, y)$ blir størst mulig. Finn denne verdien av $(x, y)$ og den tilsvarende verdien til $P$.

**Fasit**

**Oppgave 1.** 1 dm
**Oppgave 2.** $h = r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$
**Oppgave 3.** 32
**Oppgave 4.** $r = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$
**Oppgave 5.** $V = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$
**Oppgave 6.** $v = 5$ mil per time med forbruk 0.8 liter per mil.
**Oppgave 7.** 2 radianer
**Oppgave 8.** 4 cm
**Oppgave 9.** 1.27
**Oppgave 10.** 0.48
**Oppgave 11.** 0.57
**Oppgave 12.** 0.36
**Oppgave 13.** a) Min. i $(1, -2)$ b) Sadelpunkt i $(-1, 1)$ c) Min. i $(0, 0)$ d) Maks. i $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e) Sadelpunkt i $(-2, 0)$
**Oppgave 14.** $(1, -2)$, lokalt minimum.
**Oppgave 15.** $(-1, 0)$, lokalt minimum.
**Oppgave 16.** Sidene i grunnflaten skal være $\sqrt[3]{2V}$ og høyden $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.
**Oppgave 17.** a) $\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{1000}{x^2 y}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{1000}{xy^2}$
b) $x = 5, y = z = 10$
**Oppgave 18.** a) $\frac{\partial A}{\partial x} = 28 - 4x - 3y$, $\frac{\partial A}{\partial y} = 28 - 4y - 3x$, lokalt maksimum for $x = y = 4$
b) Maksimalt areal $A = 122$ for $x = y = 4$
**Oppgave 19.** $l = \frac{60}{\sqrt[3]{78}}, h = \frac{50}{\sqrt[3]{78}}$
**Oppgave 20.** a) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{60}{x^2} - 60y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{60}{y^2} - 60x$
b) Maksimalverdi $P = 1140$ for $x = y = 1$