MAT1080: Ekstraoppgaver til kapittel 4

Oppgaver om matriser

Oppgave 1. Vis at $B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ er den inverse matrisen til $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Finn løsningen $\mathbf{x}$ til ligningen

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2. I denne oppgaven er $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Vis at den inverse matrisen er

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bruk dette til å finne en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ slik at $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Oppgave 3. I denne oppgaven er A matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 1.02 & 0.01 \\ -0.2 & -0.04 & 0.98 \end{bmatrix}$$

a) Vis at den inverse matrisen til A er

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) I en innsjø lever det tre fiskeslag X, Y og Z. Vi kan tenke oss den samlede bestanden som en vektor

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

der x er antall fisk av slag X, y er antall fisk av slag Y og z er antall fisk av slag Z. Dersom bestanden et år er $\mathbf{r}$, regner forskerne at bestanden året etter vil være $A\mathbf{r}$. Dersom bestanden et år er

$$\begin{bmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix},$$

hvor stor var den det *foregående* året?

Oppgave 4. Tre hoteller A, B og C sender sengetøyet sitt til vask på to vaskerier I og II:

(i) Hotell A sender 80 % av sitt sengetøy til vaskeri I og 20 % til vaskeri II.

(ii) Hotell B sender 40 % av sitt sengetøy til vaskeri I og 60 % til vaskeri II.

(iii) Hotell C sender 30 % av sitt sengetøy til vaskeri I og 70 % til vaskeri II.

a) Lag en matrise M slik at hvis x_1, x_2 og x_3 er antall sengesett som sendes til vask av henholdsvis A, B og C, og y_1 og y_2 er antallet av disse sengesettene som mottas av henholdsvis I og II, så er

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dersom $x_1 = 200$, $x_2 = 100$ og $x_3 = 100$, hvor mange sengesett mottar hvert av vaskeriene I og II?

Vaskeri I sender 50 % av de vaskede sengesettene tilbake til hotell A, 30 % tilbake til hotell B og 20 % tilbake til hotell C (uavhengig av hvor sengesettene opprinnelig kom fra). Vaskeri II sender 20 % av de vaskede sengesettene tilbake til hotell A, 40 % tilbake til hotell B og 40 % tilbake til hotell C.

b) Anta at vaskeriene har mottatt henholdsvis y_1 og y_2 sengesett fra hotellene, og la z_1, z_z og z_3 være antall vaskede sengesett som blir sendt tilbake til henholdsvis hotell A, B og C. Finn en matrise N slik at

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Regn ut NM.

c) Dersom det en dag er sendt 100 sengesett til vask fra hvert av hotellene A, B og C, hvor mange av de vaskede sengesettene får hvert hotell tilbake fra vaskeriene?

Oppgave 5. Et bibliotek har tre filialer, A, B og C. Du kan levere tilbake en bok i hvilken filial du vil uavhengig av hvor du har lånt den. Statistikken viser at av de bøkene som blir lånt i filial A, blir 70% returnert i filial A, 20% i filial B og 10% i filial C. Av de bøkene som blir lånt i filial B, blir 30% returnert i filial A, 60% i filial B og 10% i filial C. Av de bøkene som blir lånt i filial C, blir 20% returnert i filial A, 20% i filial B og 60% i filial C.

a) Finn en matrise M slik at dersom x, y og z er antall bøker som lånes i filialene A, B og C i en lengre periode, og $\mathbf{r}$ er vektoren

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

så vil komponentene til vektoren $M\mathbf{r}$ fortelle oss hvor mange av disse bøkene som blir returnert i henholdsvis A, B og C.

b) Statistikken viser at 50% av utlånene skjer i filial A, 30% i filial B og 20% i filial C. Hvor stor prosentdel av bøkene blir returnert i filialene A, B og C?

Oppgave 6. En gruppe på 2000 velgere blir studert i forbindelse med et valg. De kan stemme på tre partier, P, Q og R. I en spørreundersøkelse to måneder før valget blir de spurt om hvilket parti de tror de kommer til å stemme på, og resultatet her blir senere sammenlignet med hvordan de faktisk stemte under valget. Undersøkelsen viser at:

(i) Av dem som sa de ville stemme på P i undersøkelsen, stemmer 70% på P, 20% på Q og 10% på R i valget.

(ii) Av dem som sa de ville stemme på Q i undersøkelsen, stemmer 20% på P, 70% på Q og 10% på R i valget.

(iii) Av dem som sa de ville stemme på R i undersøkelsen, stemmer 20% på P, 20% på Q og 60% på R i valget.

a) Anta at det var henholdsvis x_1, x_2 og x_3 velgere som sa de ville stemme på partiene P, Q og R i spørreundersøkelsen. Finn en matrise A slik at hvis

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

så er y_1, y_2 og y_3 antall velgere som stemte på henholdsvis P, Q og R ved valget.

b) Den inverse matrisen til A er

$$B = \begin{bmatrix} 1.6 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 1.6 & -0.4 \\ -0.2 & -0.2 & 1.8 \end{bmatrix}$$

(du behøver ikke sjekke at dette stemmer). Ved valget var det 800 velgere som stemte på P, 700 som stemte på Q, og 500 som stemte på R. Hvor mange var det som sa de ville stemme på henholdsvis P, Q og R i spørreundersøkelsen?

Oppgaver om ligningssystemer

Oppgave 7. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 3y - 3z &= -1 \\ -x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Oppgave 8. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 3 \\ 2x - 2y &= 4 \\ -3x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Oppgave 9. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= -2 \\ -3x + 2y - z &= 8 \\ x - 6y + 11z &= 4 \end{aligned}$$

Oppgave 10. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ -x + y - 2z &= 0 \\ -3x + 5y - 8z &= 2 \end{aligned}$$

Oppgave 11: Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + z + 2u &= 1 \\ x + y - u &= 2 \\ 3x + 4y + z + 4u &= 5 \end{aligned}$$

Oppgave 12. I denne oppgaven er a et reelt tall.

a) Vis at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a^2 - 3 & a - 2 \end{bmatrix}$$

kan radreduseres til

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 \end{bmatrix}$$

b) For hvilke verdier av a har systemet

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -1 \\ -2x - y + 2z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 3)z &= a - 2 \end{aligned}$$

ingen løsning, en entydig løsning, uendelig mange løsninger?

c) Finn løsningene til systemet når $a = 1$.

Oppgaver om egenverdier og egenvektorer

13. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Vis at $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi $\lambda_1 = 3$.

b) Vis at $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi $\lambda_1 = -1$.

c) La $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Finn tall x, y slik at $\mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2$. Regn ut $A^{10}\mathbf{a}$.

14. Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisene:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 15.

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$

b) To dyreslag bor i det samme området. Dersom det er x_n og y_n dyr av hvert slag ett år, vil det året etter være

$$x_{n+1} = 1.1x_n - 0.2y_n$$
$$y_{n+1} = 0.1x_n + 0.8y_n$$

dyr av hvert slag. Finn uttrykk for x_n og y_n dersom $x_0 = 3000$, $y_0 = 1000$. Hva skjer med bestandene når n går mot uendelig?

Oppgave 16:

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.3 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

b) To dyreslag, et byttedyr og et rovdyr, lever i det samme området. Dersom det er x_n byttedyr og y_n rovdyr i omtådet ett år, vil antall dyr året etter være

$$x_{n+1} = 1.5x_n - 0.3y_n$$
$$y_{n+1} = 0.3x_n + 0.5y_n$$

Finn x_n og y_n når $x_0 = 500$ og $y_n = 700$. Finn også grenseforholdet $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ mellom antall byttedyr og antall rovdyr.

Oppgave 17. I barnehagen har Viktoria og Emil fått hvert sitt glass saft med nøyaktig like mye saft til hver. Viktoria er imidlertid ikke helt fornøyd siden saften til Emil inneholder dobbelt så mye sukker som hennes. Glassene er ikke fullere enn at det går an å helle litt fra det ene over i det andre, og smart som hun er, får Viktoria med Emil på følgende lek: Hun heller $\frac{1}{9}$ av sin saft over i glasset til Emil, ber ham røre godt rundt og så helle den samme mengden saft tilbake i hennes glass slik at de igjen har like mye saft.

Blandeprosedyren ovenfor gjentas flere ganger. La x_n og y_n være sukkermengden i glassene til henholdsvis Viktoria og Emil etter at prosedyren er utført n ganger.

a) Vis at

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.9x_n + 0.1y_n \\ y_{n+1} &= 0.1x_n + 0.9y_n \end{aligned}$$

b) La M være matrisen slik at $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$. Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

c) Skriv $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer for M, og finn $M^n \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

d) Hvor mange ganger må blandeprosedyren utføres for at forholdet mellom sukkerinnholdet i Viktorias saft og Emils saft er minst 0.95?

Oppgave 18. I denne oppgaven er

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

I resten av oppgaven skal vi studere en modell for hvordan en ufarlig infeksjonssykdom sprer seg i en befolkning. Vi deler befolkningen i to grupper — de som er immune for sykdommen og de som er mottagelige for smitte. De fleste som nylig har hatt sykdommen vil være immune, men mange vil miste immuniteten etter som tiden går.

I modellen ønsker vi å studere hvor mange som er immune, og hvor mange som er mottagelige for smitte etter 0, 10, 20, 30, ... år. Vi lar y_n være antall immune etter 10n år og x_n antall mottagelige ved samme tidspunkt. Vi har følgende observasjoner:

Av dem som er immune ett år, vil $\frac{4}{9}$ fortsatt være immune 10 år senere, $\frac{1}{9}$ vil være døde og resten vil være mottagelige for smitte.

Av dem som er mottagelige for smitte ett år, vil halvparten være immune 10 år senere, $\frac{1}{9}$ vil være døde og resten vil være mottagelige for smitte.

I løpet av en 10-årsperiode vil befolkningen få et tilskudd på grunn av fødsel og innvandring. Dette tilskuddet er $\frac{1}{6}$ av befolkningstallet ved begynnelsen av perioden, og ved slutten av perioden vil $\frac{1}{3}$ av de nye individene være immune og resten mottagelige for smitte.

b) Vis at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

c) Anta at $x_0 = 8$ millioner og at $y_0 = 2$ milloner. Finn x_n og y_n.

d) Etter som tiden går vil prosentdelen av immune nærme seg en grense. Hva er denne grensen?

Oppgave 19. En oljemilliardær bestemmer seg for å satse på turisme. Hun kjøper 1 000 hytter på fjellet. Hyttene leies ut for ett år av gangen. Hytteeieren finner ut at 80% av hyttene som er leid ut ett år, også er leid ut året etter, mens 70% av hyttene som er tomme ett år, også er tomme neste år.

La x_n være antall utleide og y_n antall tomme hytter i år n.

a) Finn en matrise M slik at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

b) Ett år er 550 hytter utleid. Hvor mange var utleid året før?

c) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

Det første året (år 0) er halvparten av hyttene leid ut mens resten står tomme.

d) Finn x_n og y_n.

e) Det første året er nettofortjenesten pr. utleid hytte 10 000 kroner, mens utgiftene forbundet med en tom hytte er 4 000 kroner. På grunn av elde og slitasje øker utgiftene for tomme hytter med 10% per år, mens nettofortjenesten for utleide hytter ligger stabilt på 10 000 kroner i året. La P_n være nettofortjeneste i år n, dvs. inntekter minus utgifter. Finn P_n uttrykt ved n og begrunn at hytteeieren etter hvert taper penger.

Oppgave 20.

a) Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} -4x + 2y + 2z &= 0 \\ 3x - 6y + 3z &= 0 \\ x + 4y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

b) Vis at 1 er en egenverdi for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

og finn en tilhørende egenvektor.

Det viser seg at de andre egenverdiene til A er $\frac{2}{5}$ med egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\frac{1}{10}$ med egenvektor $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) Skriv $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer.

d) Et firma som driver med dagsutleie av tilhengere, har kontor i tre byer X, Y og Z. En tilhenger kan leveres tilbake ved et fritt valgt kontor uavhengig av hvor den ble leid. Til planlegging bruker firmaet en modell som sier at av de tilhengerne som en uke starter i X, vil 60% starte neste uke i X, 30% vil starte neste uke i Y og 10% vil starte neste uke i Z. Av de tilhengerne som startet i Y, vil 20% starte neste uke i X, 40% i Y og 40% i Z. Av de tilhengerne som startet i Z, vil 20% starte neste uke i X, 30% i Y og 50% i Z. Firmaet har totalt 120 tilhengere som alle i utgangspunktet er i by X. Hvordan fordeler tilhengerne seg på byene X, Y og Z etter n uker dersom modellen er korrekt? Hva skjer med fordelingen når $n \to \infty$?

Oppgaver om basiser og underrom

Oppgave 21. Skriv $\mathbf{b}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ når:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 22. Skriv $\mathbf{b}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ når:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 23. Avgjør om vektorene nedenfor danner en basis for $\mathbb{R}^n$ (for relevant n):

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Oppgave 24. Avgjør om mengden er en basis for det relevante rommet $\mathbb{R}^n$ (i noen av tilfellene lønner det seg å tenke før man regner!)

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Oppgave 25. Anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er en mengde av ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^n$ som står normalt på hverandre. Vis at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er lineært uavhengige. (*Hint:* Anta at $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ og ta skalarproduktet med $\mathbf{v}_i$ på begge sider.)

Oppgave 26. Finn rangen til A når

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

Oppgave 27. Finn en basis for underrommet H når

a) $H =< \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 >$ der $\mathbf{a}_1 = [1, -2, 1]$, $\mathbf{a}_2 = [2, -1, 3]$, $\mathbf{a}_3 = [-1, -1, -2]$.

b) $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 = 0\}$ (husk at $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$).

c) $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$ der $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$.

d) H er søylerommet til matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

e) H er radrommet til matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Oppgave 28. Vis at $\mathbf{v}_1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\mathbf{v}_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$. Skriv $\mathbf{v} = [3, -1]$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

Oppgave 29. Anta at A er en ikke-tom mengde vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vis at

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0 \text{ for alle } \mathbf{a} \in A\}$$

er et underrom av $\mathbb{R}^n$. H kalles det *ortogonale komplementet* til A.

Oppgave 30. Anta at H_1 og H_2 er underrom av $\mathbb{R}^n$.

a) Vis at $H = H_1 \cap H_2$ også er et underrom av $\mathbb{R}^n$. (Husk at *snittet* $H_1 \cap H_2$ består av de vektorene som er med i *både* H_1 og H_2.)

b) Vis ved et eksempel at $H = H_1 \cup H_2$ ikke alltid er et underrom av $\mathbb{R}^n$. (Husk at *unionen* $H_1 \cup H_2$ består av de vektorene som er med i minst én av mengdene H_1 og H_2.)

Oppgave 31. Anta at H_1 og H_2 er underrom av et vektorrom V. Vi lar

$$H_1 + H_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_1 \in H_1, \mathbf{u}_2 \in H_2\}$$

dvs. at $H_1 + H_2$ består av alle elementene i V som kan skrives som en sum av et element i H_1 og et element i H_2. Vis at $H_1 + H_2$ er et underrom av V.

Oppgaver om lineæravbildninger

Oppgave 32. Finn matrisen til lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{T}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x - y + z \\ -x + y - 3z \end{bmatrix}$$

Oppgave 33. En lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tilfredsstiller

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Finn matrisen til $\mathbf{T}$.

Oppgave 34. La $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tilfredsstiller $\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Finn $\mathbf{T}(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$.

Oppgave 35. La $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Finn tall x, y, z, u slik at $\mathbf{e}_1 = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ og $\mathbf{e}_2 = z\mathbf{a} + u\mathbf{b}$.

b) Lineæravbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tilfredsstiller $T(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Finn $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$.

c) Finn matrisen til $\mathbf{T}$.

Oppgave 36. I denne oppgaven er $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a) Vis at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

b) Skriv $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

c) Forklar hvorfor det finnes nøyaktig én lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$.

d) Finn matrisen A til lineæravbildningen $\mathbf{T}$ (dvs. 2×2-matrisen A slik at $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$)

Fasit

Oppgave 1. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \\ \frac{17}{4} \\ \\ -\frac{9}{4} \end{bmatrix}$.

Oppgave 2. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Oppgave 3. b) $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 3500 \\ 1600 \\ 1800 \end{bmatrix}$.

Oppgave 4. a) $M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$.

Vaskeri I mottar 230 sengesett og vaskeri II mottar 170.

b) $N = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$ og $NM = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.32 & 0.29 \\ 0.32 & 0.36 & 0.37 \\ 0.24 & 0.32 & 0.34 \end{bmatrix}$.

c) Det blir sendt tilbake 105 rene sengesett til hvert av hotellene A og B og 90 til C.

Oppgave 5. a) $M = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$.

b) 48% av bøkene returneres i A, 32% B og 20% i C.

Oppgave 6. a) $A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$

b) Det var 800 som sa de ville stemme på P, 600 som sa de ville stemme på Q, og 600 som sa de ville stemme på R.

Oppgave 7. $x = 25$, $y = -5$, $z = 12$.

Oppgave 8. $x = -\frac{7}{2}$, $y) = -\frac{11}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

Oppgave 9. Uendelig mange løsninger: z kan velges fritt, men så må vi sette $y = 2z - \frac{5}{4}$, $x = z - \frac{7}{2}$.

Oppgave 10. Ingen løsninger.

Oppgave 11. $u = 0$, z kan velges fritt, men da må vi sette $y = -1 - z$ og $x = 3 + z$.

Oppgave 12. b) Systemet har entydig løsning for $a \neq \pm 1$, uendelig mange løsninger for $a = 1$, og ingen løsninger for $a = -1$.

c) z kan velges fritt og gir $x = -2$ og $y = 1 + 2z$.

Oppgave 13. c) $x = 1$, $y = 2$. $A^{10}\mathbf{a} = 3^{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot (-1)^{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 14. a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\lambda_1 = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

e) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Oppgave 15: a) Egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = 1$ og egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenverdien $\lambda_2 = 0.9$.

b) $x_n = 4000 - 1000 \cdot 0.9^n$ og $y_n = 2000 - 1000 \cdot 0.9^n$. Bestandene nærmer seg henholdsvis 4000 og 2000 dyr når $n \to \infty$.

Oppgave 16. a) Egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = 1.4$ og egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ med egenverdien $\lambda_2 = 0.6$.

b) $x_n = 300 \cdot 1.4^n + 200 \cdot 0.6^n$, $y_n = 100 \cdot 1.4^n + 600 \cdot 0.6^n$ og $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 3$.

Oppgave 17. b) Egenverdiene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0.8$. Egenvektorer: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $M^n\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - (0.8)^n \\ 3 + (0.8)^n \end{bmatrix}$.

d) 12 ganger

Oppgave 18. a) Egenverdier $\lambda_1 = \frac{19}{18}, \lambda_2 = -\frac{1}{18}$, egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $x_n = 5\left[\frac{19}{18}\right]^n + 3\left[-\frac{1}{18}\right]^n, y_n = 5\left[\frac{19}{18}\right]^n - 3\left[-\frac{1}{18}\right]^n$ der x_n og y_n er målt i millioner.

d) 50%

Oppgave 19. a) $M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$

b) 500

c) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
d) $x_n = 600 - 100 \cdot (\frac{1}{2})^n$, $y_n = 400 + 100 \cdot (\frac{1}{2})^n$
e) $P_n = 10^6(6 - 0.5^n - 1.6 \cdot 1.1^n - 0.4 \cdot (0.55)^n)$

Oppgave 20: a) Den generelle løsningen er $x = y = z$, der z er et fritt valgt tall i $\mathbb{R}$.

b) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 40 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 80 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 40 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = 40 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 80 \cdot 0.4^n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 40 \cdot 0.1^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som gir $\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = 40 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{bmatrix}$. Fordelingen nærmer seg altså en likevektstilstand der det er like mange tilhengere i hver by.

Oppgave 21. $\mathbf{b} = -\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2$

Oppgave 22. $\mathbf{b} = (-1)\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + (-1)\mathbf{a}_3$

Oppgave 23. a) Ja, b) Nei, c) Ja

Oppgave 24. a) Nei (for mange elementer), b) Nei (for få elementer), c) Ja, d) Ja

Oppgave 26. a) 2, b) 2, c) 2

Oppgave 27. Det er mange riktige svar på disse oppgavene. Her er noen muligheter:
a) For eksempel $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$
b) For eksempel $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$
c) For eksempel $[0, 1, 2], [2, 1, 0]$
d) For eksempel $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
e) For eksempel $[3, -1], [2, 0]$

Oppgave 28. $\mathbf{v} = \sqrt{2}\mathbf{v}_1 + 2\sqrt{2}\mathbf{v}_2$

Oppgave 32. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Oppgave 33. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

Oppgave 34. $-\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

Oppgave 35. La $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Oppgave 36. b) $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$

d) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Løsningsforslag

Oppgave 1. Vi ganger sammen de to matrisene

$$BA = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = I_3.$$

Dette viser at $B = A^{-1}$.

Siden B er den omvendte matrisen til A, så er $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ det samme som $\mathbf{x} = B\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dermed er

$$\mathbf{x} = B\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{17}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2. Vi ganger de to matrisene sammen og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

De to matrisene er altså inverser av hverandre.

Hvis $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, så er $\mathbf{v} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, og dermed får vi

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3. a) Vi må sjekke at $AB = I_3$ (likheten $BA = I_3$ følger da av seg selv). Vi har

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 1.02 & 0.01 \\ -0.2 & -0.04 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0.2 \cdot (-0.1) + 0.1 \cdot 0.2 & 1 \cdot (-0.2) + 0.2 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0 & 1 \cdot (-0.1) + 0.2 \cdot 0 + 0.1 \cdot 1 \\ 0.1 \cdot 1 + 1.02 \cdot (-0.1) + 0.01 \cdot 0.2 & 0.1 \cdot (-0.2) + 1.02 \cdot 1 + 0.01 \cdot 0 & 0.1 \cdot (-0.1) + 1.02 \cdot 0 + 0.01 \cdot 1 \\ (-0.2) \cdot 1 + (-0.04)(-0.1) + 0.98 \cdot 0.2 & (-0.2) \cdot (-0.2) + (-0.04) \cdot 1 + 0.98 \cdot 0 & (-0.2)(-0.1) + (-0.04) \cdot 0 + 0.98 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) La $\mathbf{r_0}$ være bestanden det foregående året. Da er dagens bestand $\mathbf{r} = A\mathbf{r}_0$. Ganger vi fra venstre med A^{-1}, får vi $A^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Dermed er

$$\mathbf{r}_0 = A^{-1}\mathbf{r} = B\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 1600 \\ 1800 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4. a) Vi har

$$y_1 = 0.8x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3$$

$$y_2 = 0.2x_1 + 0.6x_2 + 0.7x_3$$

som gir

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Hvis $x_1 = 200$, $x_2 = 100$ og $x_3 = 100$, får vi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 200 + 0.4 \cdot 100 + 0.3 \cdot 100 \\ 0.2 \cdot 200 + 0.6 \cdot 100 + 0.7 \cdot 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230 \\ 170 \end{bmatrix}$$

som viser at vaskeri I mottar 230 sengesett og at vaskeri II mottar 170.

b) Vi har

$$z_1 = 0.5y_1 + 0.2y_2$$

$$z_2 = 0.3y_1 + 0.4y_2$$

$$z_3 = 0.2y_1 + 0.4y_2$$

som gir

$$N = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Videre har vi

$$NM = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.2 & 0.5 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 & 0.5 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 \\ 0.3 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 & 0.3 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.6 & 0.3 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 \\ 0.2 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 & 0.2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.6 & 0.2 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.44 & 0.32 & 0.29 \\ 0.32 & 0.36 & 0.37 \\ 0.24 & 0.32 & 0.34 \end{bmatrix}$$

c) Vi får

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = N(M \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}) = (NM) \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.44 & 0.32 & 0.29 \\ 0.32 & 0.36 & 0.37 \\ 0.24 & 0.32 & 0.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 105 \\ 90 \end{bmatrix}$$

Det blir altså sendt tilbake 105 rene sengesett til A og B og 90 til C.

Oppgave 5. a) Antall bøker som blir returnert ved de tre filialene er:

$$A : 0.7x + 0.3y + 0.2z \qquad B : 0.2x + 0.6y + 0.2z \qquad C : 0.1x + 0.1y + 0.6z$$

Bruker vi matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

ser vi at

$$M\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7x + 0.3y + 0.2z \\ 0.2x + 0.6y + 0.2z \\ 0.1x + 0.1y + 0.6z \end{bmatrix}$$

som er det vi ønsker.

b) Returnerte bøker i prosent er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 32 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Det betyr at 48% av bøkene returneres i A, 32% B og 20% i C.

Oppgave 6. a) Antallet som stemmer på P er 70% av x_1, pluss 20% av x_2, pluss 20% av x_3, dvs.

$$y_1 = 0.7x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3$$

Antallet som stemmer på Q er 20% av x_1, pluss 70% av x_2, pluss 20% av x_3, dvs.

$$y_2 = 0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.2x_3$$

Antallet som stemmer på R er 10% av x_1, pluss 10% av x_2, pluss 60% av x_3, dvs.

$$y_2 = 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.6x_3$$

Dette betyr at

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

og følgelig er

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

b) Siden $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, er $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} = B\mathbf{y}$. Dette gir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 1.6 & -0.4 \\ -0.2 & -0.2 & 1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 800 \\ 700 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.6 \cdot 800 + (-0.4) \cdot 700 + (-0.4) \cdot 500 \\ (-0.4) \cdot 800 + 1.6 \cdot 700 + (-0.4) \cdot 500 \\ (-0.2) \cdot 800 + (-0.2) \cdot 700 + 1.8 \cdot 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 600 \\ 600 \end{bmatrix}$$

Det var altså 800 som sa de ville stemme på P, 600 som sa de ville stemme på Q, og 600 som sa de ville stemme på R.

Oppgave 12. a) Vi har

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-3 & a-2 \end{bmatrix} \overset{II+2\cdot I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2-3 & a-2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{III+(-1)I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{bmatrix} = B$$

b) Legg merke til at systemet har A som utvidet matrise. Dersom $a^2 - 1 \neq 0$, har alle de tre første søylene i trappeformen B et ikke-null element på hoveddiagonalen, og systemet har dermed en entydig løsning. Det vil si at vi har entydig løsning for $a \neq \pm 1$. Det gjenstår å sjekke hva som skjer for $a = 1$ og $a = -1$.

$\underline{a = 1}$: I dette tilfellet har begge de to siste søylene 0'er i nederste rad. Det betyr at vi har uendelig mange løsninger.

$\underline{a = -1}$: I dette tilfellet er det nederste elementet i den tredje søylen null, mens det nederste elementet i den siste søylen ikke er null, og vi har derfor ingen løsninger.

$\underline{\text{Konklusjon:}}$ Systemet har entydig løsning for $a \neq \pm 1$, uendelig mange løsninger for $a = 1$, og ingen løsninger for $a = -1$.

c) Når $a = 1$, er

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at vi kan velge z fritt, og beregne x og y etter ligningene

$$x + y - 2z = -1$$
$$y - 2z = 1$$

Dette gir $y = 1 + 2z$ og $x = -1 - y + 2z = -1 - (1 + 2z) + 2z = -2$. Følgelig er løsningene

$$x = -2, \quad y = 1 + 2z, \quad z = z$$

der z er et fritt valgt reelt tall.

Oppgave 15: Vi finner først egenverdiene. Siden

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1.1 - \lambda & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.9\lambda + 0.9$$

er egenverdiene gitt av annengradsligningen $\lambda^2 - 1.9\lambda + 0.9 = 0$. Løsningene av denne ligningen er

$$\lambda = \frac{-(-1.9) \pm \sqrt{(-1.9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.9}}{2} = \frac{1.9 \pm \sqrt{0.01}}{2} = \begin{cases} 1 \\ \\ 0.9 \end{cases}$$

så egenverdiene blir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.9$.

For å finne en egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = 1$, ser vi på ligningssystemet $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, dvs.

$$\begin{bmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Multipliserer vi ut og rydder opp, får vi kravet $0.1x - 0.2y = 0$, dvs. $x = 2y$. Velger vi $y = 1$, får vi dermed egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

For å finne en egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ med egenverdi $\lambda_2 = 0.9$, ser vi på ligningssystemet $A\mathbf{v}_2 = 0.9\mathbf{v}_2$, dvs.

$$\begin{bmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.9 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Multipliserer vi ut og rydder opp, får vi kravet $0.2x - 0.2y = 0$, dvs. $x = y$. Velger vi $y = 1$, får vi dermed egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Oppsummering: Vi har egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = 1$ og egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenverdien $\lambda_2 = 0.9$.

b) Dersom vi lar $\mathbf{r}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, ser vi at $\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n$ som ved iterasjon leder til $\mathbf{r}_n = A^n\mathbf{r}_0$. Hvis $\mathbf{r}_0$ kan skrives som en lineærkombinasjon $\mathbf{r}_0 = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$, får vi dermed at

$$\mathbf{r}_n = A^n(c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2) = \lambda_1^n c\mathbf{v}_1 + \lambda_2^n d\mathbf{v}_2 = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.9^n d \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For å finne c og d må vi løse ligningssystemet $\mathbf{r}_0 = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$ for c og d. Dette systemet kan skrives

$$\begin{bmatrix} 3000 \\ 1000 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og har løsningene $c = 2000$, $d = -1000$. Dermed har vi

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{r}_n = 2000 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.9^n \cdot 1000 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som gir

$$x_n = 4000 - 1000 \cdot 0.9^n$$
$$y_n = 2000 - 1000 \cdot 0.9^n$$

Vi ser at bestandene nærmer seg henholdsvis 4000 og 2000 dyr når $n \to \infty$.

Oppgave 20: a) Vi radreduserer den utvidede matrisen til ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \overset{I \Leftrightarrow III}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{II+(-3)I \\ III+4I}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -18 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & -18 & 0 \end{bmatrix} \overset{I \Leftrightarrow III}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -18 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{18}II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at z kan velges fritt, mens x og y må uttrykkes ved z. Setter vi inn variablene igjen (og neglisjerer den nederste ligningen), får vi ligningssystemet.

$$\begin{aligned} x + 4y - 5z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

Fra den nederste ligningen får vi $y = z$ som innsatt i den øverste gir $x = z$. Den generelle løsningen er altså $x = y = z$, der z er et fritt valgt tall i $\mathbb{R}$.

b) Det er nok å vise at det finnes en egenvektor med egenverdi 1, dvs. at det finnes en ikke-null løsning $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ av ligningssystemet $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Setter vi inn, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} 0.6x + 0.2y + 0.2z &= x \\ 0.3x + 0.4y + 0.3z &= y \\ 0.1x + 0.4y + 0.5z &= z \end{aligned}$$

Dette ligningssystemet er ekvivalent med det vi hadde i punkt a) og har derfor løsningene $x = y = z$. Velger vi $z = 1$, har vi funnet egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) For å skrive $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av de oppgitte egenvektorene, må vi finne tall x, y, z slik at

$$\mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$$

dvs. slik at

$$\begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette er et lineært ligningssystem med løsninger $x = 40$, $y = 80$ og $z = 40$. Altså er

$$\begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 40 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 80 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 40 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Dersom x_n, y_n, z_n er antall tilhengere i hver by etter n uker, er ifølge oppgaveteksten

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.6x_n + 0.2y_n + 0.2z_n \\ y_{n+1} &= 0.3x_n + 0.4y_n + 0.3z_n \\ z_{n+1} &= 0.1x_n + 0.4y_n + 0.5z_n \end{aligned}$$

Setter vi $\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, kan denne ligningen skrives

$$\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n$$

Dermed er $\mathbf{u}_n = A^n\mathbf{u}_0$, der $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (husk at alle tilhengerne startet i X). Bruker vi lineærkombinasjonen fra forrige punkt, får vi dermed

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 40A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 80A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 40A^n \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 40 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 80 \cdot 0.4^n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 40 \cdot 0.1^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som gir antall tilhengere i de forskjellige byene etter n uker. Når $n \to \infty$, vil $0.4^n \to 0$ og $0.1^n \to 0$, så

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = 40 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Fordelingen nærmer seg altså en likevektstilstand der det er like mange tilhengere i hver by.