MAT1080: Ekstraoppgaver før eksamen

Oppgave 1. Finn og klassifiser de stasjonære punktene til

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Oppgave 2. Finn og klassifiser de stasjonære punktene til

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$$

Oppgave 3. Finn og klassifiser de stasjonære punktene til

$$f(x, y) = xye^{x-y}$$

Oppgave 4. Finn det stasjonære punktet til $f(x, y) = x^2 + 2xy + 5y^2 + 4y$ og avgjør om det er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et sadelpunkt.

Oppgave 5. Finn eventuelle stasjonære punkter til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$$

og avgjør hva slags type de er.

Oppgave 6. Løs integralene.

a) $\int_0^\pi (x + 1) \sin x \, dx$

b) $\int x^3 \cos x^4 \, dx$

c) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x^4 \, dx$

d) $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$

e) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx$

Oppgave 7. Finn grenseverdiene:

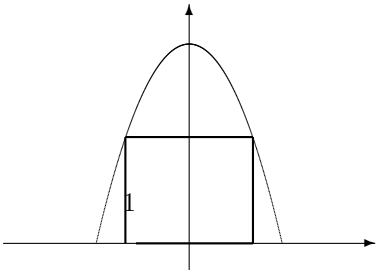
a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{2x}-1}$

b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{1-\cos x}$.

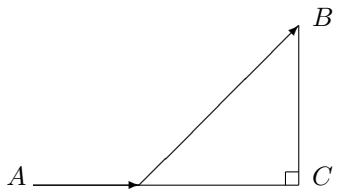
d) $\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$

Oppgave 8. Figuren nedenfor viser parabelen $f(x) = 12 - x^2$ og et rektangel som ligger under funksjonsgrafen og over x-aksen. Hva er det største arealet et slikt rektangel kan ha?



Oppgave 9. En eske skal ha kvadratisk bunn, men ingen topp. Volumet til esken skal være 4 dm^3. Hvor høy må esken være for at overflatearealet (bunn+sidevegger) skal bli minst mulig?

Oppgave 10. En orienteringsløper skal løpe fra punkt A til punkt B på figuren. Hun planlegger å følge veien fra A til C et stykke, og så løpe ut i terrenget i retning B (se pilene på figuren). Avstanden fra A til C er 500 m og avstanden fra C til B er 300 m. Langs veien kan hun løpe med en fart av 5 m/s, mens hun i terrenget løper med en fart av 3 m/s. Hvor langt må hun løpe langs veien for å bruke kortest tid fra A til B?



Oppgave 11. Det amerikanske postvesenet ekspederer bare pakker der summen av lengde, bredde og høyde er mindre enn 108 tommer. Hva er det største volumet en kasseformet pakke kan ha?

Oppgave 12. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 1 \\ -x + 3y + z &= 1 \\ 2x - 4y &= 1 \end{aligned}$$

Oppgave 13. Finn den generelle løsningen til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 4x + y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

Oppgave 14. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ x - 2y - z &= 1 \\ x + 4y + z &= 2 \end{aligned}$$

Oppgave 15. Finn egenverdiene og egenvektorene til $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Oppgave 16. I denne oppgaven skal vi se på to mobilselskaper, X og Y, som opererer i det samme markedet. Undersøkelser tyder på at markedet har denne dynamikken:

(i) Hvert år mister selskap X 40% av sine kunder til selskap Y, men får en netto tilvekst av nye kunder (som ikke har operert i markedet før) lik 50% av kundemassen de hadde fra før.

(ii) Selskap Y mister hvert år 10% av sine kunder til selskap Y. I tillegg vil 10% av kundene deres forlate markedet.

Anta at x_n og y_n er antall kunder X og Y har etter n år.

a) Forklar at
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

b) Finn egenverdiene til $M = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$.

c) Finn egenvektorene til M.

d) I år 0 har selskap X 6 millioner kunder mens selskap 1 har 1 million kunder. Hvor mange kunder har vært av selskapene året etter? Hvor mange har de etter n år?

Oppgave 17. (Denne oppgaven er en del tøffere enn det som er aktuelt til eksamen, men det er mye å lære av den.) I en by finnes det tre aviser, en skandaleavis A, en rimelig seriøs avis B og en svært seriøs avis C. I løpet av fem år skjer det følgende forandringer:

Avisene A og C får et antall nye kjøpere (som ikke har kjøpt noen avis tidligere) tilsvarende 10% av det antall kjøpere de hadde ved starten av perioden, mens avis B får en tilvekst av nye kjøpere på 20%. 10% av leserne av avis A slutter med A og går over til B. 10% av leserne av B slutter med B og går over til A og en annen gruppe på 10% går over til C. 10% av kjøperne av C slutter med C og begynner å kjøpe B. Ellers beholder alle kjøperne sin gamle avis.

La x_n, y_n, z_n være salgstallene for henholdsvis avis A, B og C i året $5n$, for $n = 1, 2, 3 \ldots$.

a) Finn en matrise M slik at
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

c) Finn x_n, y_n, z_n uttrykt ved x_0, y_0, z_0 og n. Vis at forholdet mellom salgstallene nærmer seg grenser som er uavhengig av starttilstanden. Finn $k_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ og $k_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{z_n}$.

Oppgave 18. I denne oppgaven er A en $n \times n$-matrise og A^T er dens transponerte.

a) Forklar at for alle tall λ er $A^T - \lambda I_n$ den transponerte til $A - \lambda I_n$.

b) Vis at A og A^T har de samme egenverdiene.

c) Finn et eksempel på en 2×2-matrise der A og A^T ikke har de samme egenvektorene.

Vi sier at A er *stokastisk* dersom alle radene har sum 1 (dvs. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ for alle i).

d) Vis at hvis A er stokastisk, så er $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor med egenverdi 1.

e) Vis at dersom B er en $n \times n$-matrise B der alle *søylene* har sum 1, så er 1 en egenverdi for B.

f) (Mye arbeid!) Finn egenverdiene og egenvektorene til $B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$.

Fasit

Oppgave 1. $(0,0)$ sadelpunkt, $(1,1)$ lokalt minimum.

Oppgave 2. $(-4,6)$ sadelpunkt, $(0,-2)$ lokalt maksimum, $(1,-3/2)$ sadelpunkt.

Oppgave 3. $(0,0)$ sadelpunkt, $(-1,1)$ lokalt minimum.

Oppgave 4. $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ lokalt minimum.

Oppgave 5. $(0,0)$ lokalt minimum, $(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$ sadelpunkt.

Oppgave 6. a) $2+\pi$, b) $\frac{\sin x^4}{4}+C$, c) $\ln 4-2$, d) $2-\frac{5}{e}$, e) $x+2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}-1)+C$

Oppgave 7. a) $\frac{1}{2}$, b) -1, c) 1, d) 2.

Oppgave 8. 32

Oppgave 9. 1 dm

Oppgave 10. 275 m.

Oppgave 11. 36^3 tommer

Oppgave 12. Ingen løsninger

Oppgave 13. z kan velges fritt, og så blir $y=z$, $x=1-z$.

Oppgave 14. $x=-\frac{1}{4}, y=\frac{7}{4}, z=-\frac{19}{4}$

Oppgave 15. $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-4$, $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

Oppgave 16. b) $\lambda_1=1.2, \lambda_2=0.7$.
c) $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$.
d) $x_1=6.7$ millioner, $y_1=3.2$ millioner, $x_n=5\cdot 1.2^n+0.7^n$ millioner, $y_n=5\cdot 1.2^2-4\cdot 0.7^n$ millioner.

Oppgave 17. a) $M=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 1 & 0.1\\ 0 & 0.1 & 1\end{bmatrix}$

b) $\lambda_1=1, \lambda_2=1+\frac{\sqrt{2}}{10}, \lambda_3=1-\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\\x_n\end{bmatrix}=\frac{1}{2}(x_0-z_0)\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n\left(\frac{1}{4}(x_0+z_0)+\frac{\sqrt{2}}{4}y_0\right)\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$

$$+\left(1-\tfrac{\sqrt{2}}{10}\right)^n\left(\tfrac{1}{4}(x_0+z_0)-\tfrac{\sqrt{2}}{4}y_0\right)\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$$

d) $k_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, k_2=\sqrt{2}$

Oppgave 18. b) Det finnes massevis av eksempler, så det er bare å prøve seg frem. $A=\begin{bmatrix}3&4\\-1&-2\end{bmatrix}$ gir enkle regninger.

f) $\lambda_1=1, \lambda_2=\frac{1}{5}, \lambda_3=\frac{1}{10}$, $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$.