MAT1080: Løsningsforslag for Oblig 1, H25

Oppgave 1. a) Deriverer med hensyn på en variabel av gangen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin y \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos y + 3y^2$$

b) Bruker kjerneregelen og får:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y}\cdot 2xy = 2xye^{x^2y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2y}\cdot x^2 = x^2e^{x^2y}$$

c) Her må vi både bruke produktregelen og kjerneregelen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\cos(x^2+y) + xy^2\cdot(-\sin(x^2+y))\cdot 2x = y^2\cos(x^2+y) - 2x^2y^2\sin(x^2+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\cos(x^2+y) + xy^2\cdot(-\sin(x^2+y))\cdot 1 = 2xy\cos(x^2+y) - xy^2\sin(x^2+y)$$

Oppgave 2. a) Bruker vi produktregelen og kjerneregelen, får vi:

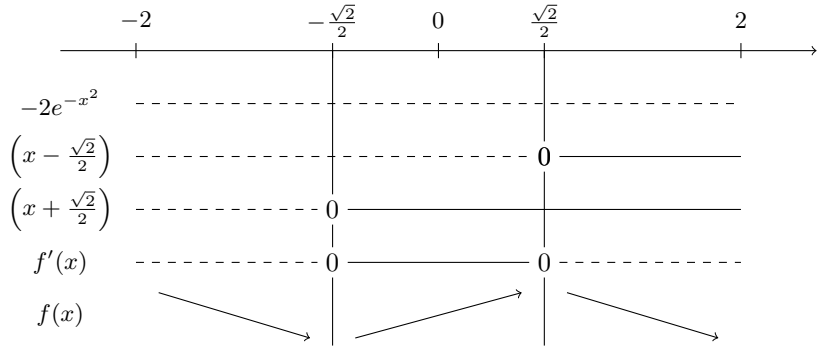
$$f'(x) = 1\cdot e^{-x^2} + xe^{-x^2}\cdot(-2x) = e^{-x^2}(1-2x^2) = -2e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Vi ser at $f'(x)$ er 0 når $x^2 - \frac{1}{2} = 0$, dvs. når $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden f er deriverbar overalt, er de kritisk punktene $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ samt endepunktene $x = -2$ og $x = 2$.

b) Vi kan faktorisere $f'(x)$ som

$$f'(x) = -2e^{-x^2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Dette gir fortegnsskjemaet:



Fra fortegnsskjemaet ser vi at f er voksende på intervallet $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ og avtagende på intervallene $\left[-2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ og $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$.

c) Fra fortegnskjemaet ser vi også at -2 og $\frac{\sqrt{2}}{2}$ er lokale maksimumspunkter mens $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ og 2 er lokale minimumspunkter. Dette betyr at (det globale)

maksimumspunktet til f må være enten -2 eller $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden funksjonsverdien er negativ i det første punktet og positiv i det andre, må maksimumspunktet være $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Maksimumsverdien er dermed

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}.$$

Tilsvarende ser vi at minimumspunktet til f må være enten 2 eller $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden funksjonsverdien er positiv i det første punktet og negativ i det andre, må minimumspunktet være $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ og minmumsverdien er dermed

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}.$$

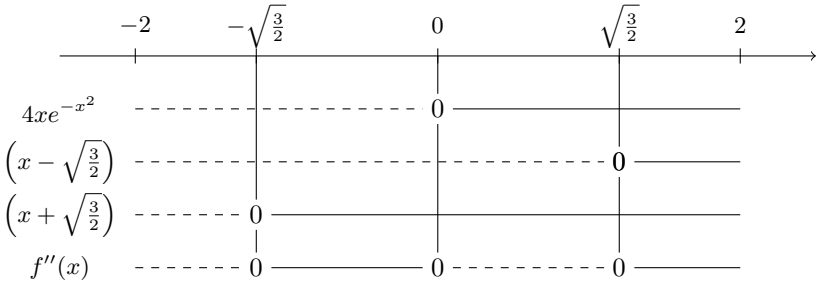
d) Vi finner den dobbeltderiverte ved å derivere den deriverte. Ved hjelp av produktregelen og kjerneregelen, får vi

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-2e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\right)' \\ &= -2e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2e^{-x^2}\cdot 2x \\ &= 4xe^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 4xe^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}(4x^3 - 6x) = 4xe^{-x^2}\left(x^2 - \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Dette uttrykket kan faktoriseres som

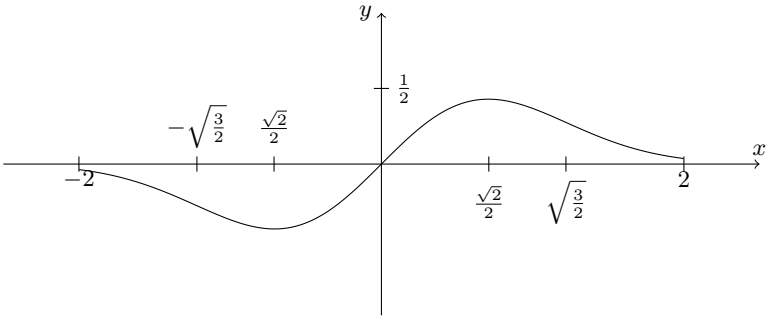
$$f''(x) = 4xe^{-x^2}\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

e) Vi lager et fortegnsskjema for den annenderiverte:



Skjemaet viser at vendepunktene er $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0 og $\sqrt{\frac{3}{2}}$ og at funksjonen krummer oppover i intervallene $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right]$ og $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right]$ og nedover i intervallene $\left[-2, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ og $\left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$.

f) Figuren nedenfor viser grafen til f:

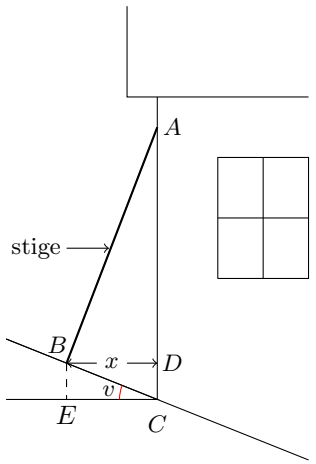


Oppgave 3. a) Vi bruker at $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$:

$$\frac{\tan v}{\sqrt{1+\tan^2 v}} = \frac{\frac{\sin v}{\cos v}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}}} = \frac{\frac{\sin v}{\cos v}}{\sqrt{\frac{\cos^2 v+\sin^2 v}{\cos^2 v}}}$$

$$= \frac{\frac{\sin v}{\cos v}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 v}}} = \frac{\frac{\sin v}{\cos v}}{\frac{1}{\cos v}} = \sin v$$

(siden v ligger i første kvadrant, er $\cos v$ positiv, og dermed er $\sqrt{\cos^2 v} = \cos v$).



b) På figuren har jeg lagt inn et ekstra punkt D slik at $|AC| = |AD| + |DC|$. Ved å bruke Pytagoras' setning på trekanten $\triangle ABD$, ser vi at

$$|AD| = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

For å regne ut $|DC|$ observere vi først at $|DC| = |BE|$ (E er også et nytt punkt jeg har lagt inn på figuren). Ved definisjonen av tangens er

$$\tan v = \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|DC|}{x}$$

som gir oss $|DC| = x \tan v$. Alt ialt har vi dermed

$$|AD| = |DC| + |AC| = x \tan v + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

c) Vi deriverer

$$f(x) = x\tan v + \sqrt{a^2 - x^2}$$

og får

$$f'(x) = \tan v + \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \tan v - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

For å finne nullpunktet til $f'(x)$, løser vi ligningen

$$\tan v = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

for x. Ganger vi kvadratroten over på den andre siden og kvadrerer, får vi først

$$\tan v\sqrt{a^2 - x^2} = x$$

og deretter

$$\tan^2 v(a^2 - x^2) = x^2.$$

Vi samler leddene med x:

$$x^2(1 + \tan^2 v) = a^2 \tan^2 v,$$

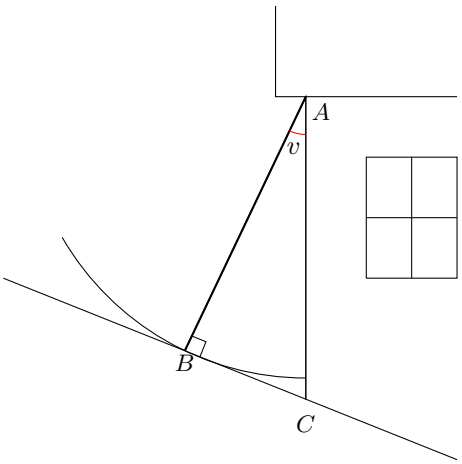
og løser:

$$x = \frac{a\tan v}{\sqrt{1 + \tan^2 v}} = a\sin v,$$

der det siste skrittet bruker formelen fra a). Siden fortegnet til $f'(x)$ skifter fra positivt til negativt over intervallet $[0, a]$, må $x = a\sin v$ være maksimumspunktet til funksjonen.

d) Det er flere måter å gå frem på, men den enkleste er kanskje å observere at $\sin\angle BAD = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{x}{a} = \frac{a\sin v}{a} = \sin v$. Siden både v og $\angle BAD$ er spisse vinkler, betyr dette at $\angle BAD = v$. Ser vi på vinklene i trekanten $\triangle ABD$, følger det at $\angle ABD = \frac{\pi}{2} - v$. Siden $\angle CBD = v$ ved grunnleggende geometri, får vi dermed

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = v + \left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{\pi}{2}.$$



For å forklare dette fenomenet geometrisk ser vi på figuren ovenfor som viser en situasjon der stigen står normalt på underlaget i punktet B. Jeg har slått en

sirkelbue med radius lik stigelengden $a = |AB|$ om toppunktet A. Alle punkter som ligger utenfor denne sirkelbuen, har en avstand til A som er lenger enn a. Alle punkter på bakken, bortsett fra B, ligger utenfor sirkelbuen, og vi trenger derfor en lengre stige for å nå opp til A derfra.

e) Det er to måter å resonnere på. Den raskeste er å utnytte at vi nå vet at vinkelen $\angle ABC$ er rett og at $\angle BAD = v$. Ser vi på trekanten $\triangle ABC$ på figuren ovenfor, har vi dermed

$$\cos v = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a}{|AC|}$$

som gir $|AC| = \frac{a}{\cos v}$.

En mer tradisjonell metode er å sette inn den optimale x-verdien $x = a \sin v$ i funksjonsuttrykket:

$$\begin{aligned} |AC| = f(a \sin v) &= (a \sin v) \tan v + \sqrt{a^2 - (a \sin v)^2} \\ &= a \frac{\sin^2 v}{\cos v} + a\sqrt{1 - \sin^2 v} = a \left(\frac{\sin^2 v}{\cos v} + \cos v \right) \\ &= a \frac{\sin^2 v + \cos^2 v}{\cos v} = \frac{a}{\cos v}. \end{aligned}$$

SLUTT