MAT1080: Løsningsforslag for Oblig 2, H25

Oppgave 1 a) Vi løser først det ubestemte integralet $\int x\cos x\,dx$ ved hjelp av delvis integrasjon med $u = x$, $v' = \cos x$. Dette gir $u' = 1$, $v = \sin x$, og vi får

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

Setter vi inn grensene, får vi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos x\,dx &= \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^\pi = (\pi\cdot\sin\pi + \cos\pi) - (0\cdot\sin 0 + \cos 0)\\ &= (0-1) - (0+1) = -2\end{aligned}$$

b) Vi løser først det ubestemte integralet $\int xe^{-x^2}\,dx$ ved å substituere $u = -x^2$. Da er $du = -2x\,dx$, som gir $x\,dx = -\frac{1}{2}du$, og følgelig er

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Vi setter inn grensene og får:

$$\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^2 = -\frac{1}{2}e^{-2^2} - \left(-\frac{1}{2}e^{-0^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4}\right).$$

c) Vi substituerer $u = \sqrt{x} + 1$ (dette gir litt enklere regninger enn å sette $u = \sqrt{x}$). Løser vi dette uttrykket for x, får vi $x = (u-1)^2$. Derivasjon gir $dx = 2(u-1)\,du$, og setter vi dette inn i integralet, får vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot 2(u-1)\,du = 2\int\left(1 - \frac{1}{u}\right)\,du$$

$$= 2(u - \ln|u|) + K = 2\Big((\sqrt{x}+1) - \ln(\sqrt{x}+1)\Big) + K = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C,$$

hvor det siste skrittet skyldes at vi kan inkorporere 2 i integrasjonskonstanten.

Oppgave 2. a) Vi partiellderiverer funksjonen $f(x,y) = 2x^2y + 2xy + y^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 2y = 2y(2x+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2x + 2y = 2(x^2 + x + y)$$

I et kritisk punkt må begge de partiellderiverte være null. Fra det første uttrykket ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial x}$ være null, må $y = 0$ eller $x = -\frac{1}{2}$. Vi drøfter disse tilfellene hver for seg:

$\underline{y = 0}$: Setter vi $y = 0$ inn i det andre uttrykket, ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial y}$ være 0, må $x^2 + x = 0$. Det betyr at $x = 0$ eller $x = -1$. Dermed har vi de kritiske punktene $(0,0)$ og $(-1,0)$.

$\underline{x = -\frac{1}{2}}$: Setter vi $x = -\frac{1}{2}$ inn i det andre uttrykket, ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial y}$ være 0, må $(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + y = 0$. Dette gir $y = \frac{1}{4}$, og dermed er $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et kritisk punkt.

I alt har vi dermed tre kritiske punkter: $(0,0)$, $(-1,0)$ og $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

b) Vi skal bruke annenderiverttesten til å avgjøre hva slags kritiske punkter vi har. De annenderiverte er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x + 2, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Vi bruker annenderiverttesten på hvert av punktene:

$\underline{(0,0)}$: Vi har $A = 0$, $B = 2$, $C = 2$ og

$$H(0,0) = AC - B^2 = 0 \cdot 2 - 2^2 = -4$$

Siden $H(0,0) < 0$, er $(0,0)$ et sadelpunkt.

$\underline{(-1,0)}$: Vi har $A = 0$, $B = -2$, $C = 2$ og

$$H(-1,0) = AC - B^2 = 0 \cdot 2 - (-2)^2 = -4$$

Siden $H(-1,0) < 0$, er $(-1,0)$ et sadelpunkt.

$\underline{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})}$: Vi har $A = 1$, $B = 0$, $C = 2$ og

$$H\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = AC - B^2 = 1 \cdot 2 - (0)^2 = 2$$

Siden $H(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) > 0$ og $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) > 0$, er $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et lokalt minimum.

Oppgave 3. a) Vi må vise at $x = y = z = 0$ er den *eneste* løsningen av ligningen $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Denne ligningen er ekvivalent med ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -x + 0y + 2z &= 0 \\ 2x + y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

som kan forenkles til

$$x + y + z = 0 \tag{1}$$
$$x = 2z \tag{2}$$
$$y = -2x \tag{3}$$

Dette ligningssystemet kan løses ved Gauss-eliminasjon/radreduksjon, men det er like lett å bruke sunn fornuft: Kombinerer vi (2) og (3), ser vi at $y = -4z$. Hvis vi setter dette og $x = 2z$ inn i ligning (1), får vi $2z - 4z + z = 0$, som medfører at $z = 0$. Dermed er $x = 2z = 0$ og $y = -4z = 0$, og vi har vist at $x = y = z = 0$ er den *eneste* løsningen av ligningen $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

b) Vi må finne tall x, y, z slik at $x\mathbf{u}+y\mathbf{v}+z\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Dette er ekvivalent med ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + 0y + 2z &= 4 \\ 2x + y + 0z &= 3 \end{aligned}$$

Igjen kan vi bruke Gauss-eliminasjon, men siden det er så mange 0'er i systemet, er det like lett å tenke selv. Systemet kan skrives om som

$$x + y + z = 4 \tag{4}$$
$$x = 2z - 4 \tag{5}$$
$$y = 3 - 2x \tag{6}$$

Fra (5) og (6) ser vi at både z og y kan uttrykkes ved x: $z = \frac{x}{2}+2$ og $y = 3-2x$. Setter vi dette inn i (4), får vi

$$x + (3 - 2x) + \left(\frac{x}{2} + 2\right) = 4,$$

som gir $x = 2$. Dermed er $y = 3 - 2x = -1$ og $z = \frac{x}{2} + 2 = 3$. Dette betyr at

$$2\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v} + 3\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

som er lineærkombinasjonen vår.

Oppgave 4.) Vi setter

$$M = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Dette gir

$$\mathbf{r}_1 = M\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0.6x + 0.3y + 0.6z \\ 0.3x + 0.5y + 0.1z \\ 0.1x + 0.2y + 0.3z \end{bmatrix}$$

som stemmer med opplysningene i oppgaven. Med $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 70 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$, får vi

$$\mathbf{r}_1 = M\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \cdot 70 + 0.3 \cdot 30 + 0.6 \cdot 20 \\ 0.3 \cdot 70 + 0.5 \cdot 30 + 0.1 \cdot 20 \\ 0.1 \cdot 70 + 0.2 \cdot 30 + 0.3 \cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 38 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at 63 biler returneres til A, 38 til B og 19 til C.

b) Vi må finne en vektor $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ slik at $x + y + z = 120$ og $M\mathbf{r} = \mathbf{r}$.

Skriver vi ut den siste ligningen på komponentform, får vi

$$\begin{aligned} 0.6x + 0.3y + 0.6z &= x \\ 0.3x + 0.5y + 0.1z &= y \\ 0.1x + 0.2y + 0.3z &= z \end{aligned}$$

Rydder vi opp litt i disse ligningen (samler ledd og ganger med 10), får vi

$$-4x + 3y + 6z = 0 \tag{7}$$
$$3x - 5y + z = 0 \tag{8}$$
$$x + 2y - 7z = 0 \tag{9}$$

I tillegg har vi altså

$$x + y + z = 120. \tag{10}$$

Det er instruktivt å løse dette systemet ved Gauss-eliminasjon, men igjen er det raskere å bruke rå makt:

Systemet kan se litt skummelt ut siden vi har fire ligninger med tre ukjente, men vi løser tre av ligningene og håper at resultatet passer i den fjerde. Siden ligning (10) er den eneste som forteller oss at det finnes 120 biler totalt, bør vi i hvert fall ha med den i løsningsforsøket vårt. Her er en måte å løse systemet på (det finnes mange andre). Fra (9) ser vi at $x = -2y + 7z$. Setter vi dette inn i (7), får vi

$$-4(-2y + 7z) + 3y + 6z = 0$$

som etter litt opprydning gir $y = 2z$. Setter vi dette inn i uttrykket $x = -2y+7z$, får vi $x = -2 \cdot (2z) + 7z = 3z$. Vi setter så $x = 3z$, $y = 2z$ inn i ligning (10), og får:

$$3z + 2z + z = 120$$

som gir $z = 20$. Dermed er $x = 3 \cdot 20 = 60$ og $y = 2 \cdot 20 = 40$. Vi må sjekke at dette virkelig er en løsning av ligningssystemet (7)-(10) (spesielt må vi sjekke ligning (8) som vi ikke brukte i utledningen), men ved innsetting ser vi at vi virkelig har funnet en løsning til hele ligningssystemet.

For å få en"likevektstilstand" der det i hver by returneres like mange biler som det leies ut, må vi altså plassere 60 biler i A, 40 biler i B og 20 biler i C.

Kommentar: Med tanke på hva som kommer senere i pensum, har vi nettopp vist at

$$M \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Dette betyr at $\lambda = 1$ er en egenverdi for M med $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ som egenvektor.

SLUTT