Prøveeksamen 1 i MAT1080, H25

Denne prøveeksamenen har 12 delspørsmål (1, 2a), 2b) osv.) og burde tilsvare et normalt eksamenssett i arbeidsmengde og vanskelighetsgrad. På eksamen vil vanligvis alle delspørsmålene telle like mye. Eksamenstiden er 4 timer, og det er lurt å sette av 4 timer til å arbeide sammenhengende med en prøveeksamen for å få en følelse med eksamensformatet.

Oppgave 1. (10 poeng) Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 4x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Oppgave 2. Løs integralene

a) (10 poeng) $\int \sin x \cos x \, dx$

b) (10 poeng) $\int_1^e x \ln x \, dx$

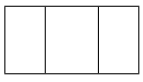
Oppgave 3.

a) (10 poeng) Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy.$$

b) (10 poeng) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

Oppgave 4. (10 poeng) En speilprodusent planlegger å starte produksjonen av en ny serie. De nye speilene skal ha et areal på $1\,\mathrm{m}^2$ og være formet som et rektangel. Speilene blir delt i tre deler av to loddrette lister (se figur). Rundt hele speilet skal det også være lister. Hvor høye må speilene være for at den totale lengden av lister skal bli så kort som mulig?



Et speil

Oppgave 5.

a) (10 poeng) Skriv $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) (10 poeng) Finn egenverdiene til matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

c) (10 poeng) Finn egenvektorene til M.

Vi studerer en modell for hvordan en dyrebestand utvikler seg fra år til år. Vi deler bestanden i to kategorier, *unge dyr* og *gamle dyr*. Anta at det i år n er x_n unge dyr og y_n gamle dyr. Modellen sier da at det i år $n+1$ vil være x_{n+1} unge dyr og y_{n+1} gamle dyr der

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

d) (10 poeng) Anta at det i år 0 er 5 000 dyr av hver kategori. Hvor mange dyr av hver kategori finnes det i år n? Hvordan går det med fordelingen mellom unge og gamle dyr når n går mot ∞?

Oppgave 6.

a) (10 poeng) Vis at egenverdiene til en symmetrisk 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ kan skrives

$$\lambda = \frac{a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

b) (10 poeng) Bruk resultatet i a) til å vise at det for enhver symmetrisk 2×2-matrise finnes en basis av egenvektorer. (*Hint:* Du behøver ikke finne et generelt uttrykk for egenvektorene for å løse oppgaven).

LYKKE TIL!