Løsningsforslag til Prøveeksamen 1 i MAT1080, H25

Oppgave 1. Vi radreduserer den utvidede matrisen til ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{II-2I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{III-4I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 9 & -9 & -6 \end{bmatrix} \overset{III-3II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Setter vi inn variablene igjen, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 3y - 3z &= -2 \\ 0z &= 0 \end{aligned}$$

Fra den nederste ligningen ser vi at vi kan velge z fritt, og systemet har uendelig mange løsninger. Fra den nest nederste ligningene får vi $y = z - \frac{2}{3}$, og setter vi dette inn i den øverste ligningen, ser vi at $x = 2 + 2y - 3z = 2 + 2(z - \frac{2}{3}) - 3z = \frac{2}{3} - z$.

Oppgave 2. a) Vi innfører ny variabel $u = \sin x$ og får $du = \cos x\, dx$. Dermed er

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

b) Vi løser først det ubestemte integralet ved delvis integrasjon. Setter vi $u = \ln x$, $v = x$, får vi $u' = \frac{1}{x}$ og $v = \frac{1}{2}x^2$. Dermed er

$$\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2.$$

Setter vi inn grensene (og husker at $\ln 1 = 0$, $\ln(e) = 1$), får vi:

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Oppgave 3. a) Vi partiellderiverer funksjonen $f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 10x - 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 6x = 6(y - x)$$

I et stasjonært punkt må begge de partiellderiverte være null. Fra det andre uttrykket ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial y}$ være null, må vi ha $y = x$. Setter vi dette inn i den første ligningen, får vi $3x^2 + 4x = 0$. Denne ligningen har løsningene $x = 0$ og $x = -\frac{4}{3}$. Dermed har vi to stasjonære punkter $(0, 0)$ og $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

b) Vi skal bruke annenderiverttesten til å avgjøre hva slags stasjonære punkter vi har. De annenderiverte er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 10, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$$

Hesse-determinanten er dermed $Hf(x, y) = AC - B^2 = (6x+10)\cdot 6 - (-6)^2 = 36x + 24$, og vi får:

Punktet $(0, 0)$: Vi har

$$H(0, 0) = 36 \cdot 0 + 24 = 24,$$

og siden $H(0, 0) > 0$, er $(0, 0)$ enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum. Vi ser derfor på $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 6 \cdot 0 + 10 = 10$, og siden denne størrelsen er positiv, er $(0, 0)$ et lokalt minimum.

Punktet $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$: Vi har

$$H\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = 36 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 24 = -48 + 24 = -24 < 0$$

og siden $H(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) < 0$, er $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ et sadelpunkt.

Oppgave 4. Kall høyden til speilet x og lengden y. Lengden av listene er $L = 2y + 4x$. Siden arealet skal være $1\,\mathrm{m}^2$, må $xy = 1$, dvs. $y = \frac{1}{x}$, og setter vi dette inn i uttrykket for L, får vi

$$L(x) = \frac{2}{x} + 4x$$

Derivasjon gir $L'(x) = -\frac{2}{x^2} + 4$, og viser at $L'(x) = 0$ når $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (egentlig $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, men det er bare den positive roten som gir mening). Det er lett å sjekke at dette er et minimumspunkt, og følgelig er listlengden kortest når $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Oppgave 5. a) Vi må finne tall x og y slik at $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dette gir ligningene

$$\begin{aligned} 4x - y &= 5 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

Legger vi sammen ligningene, får vi $5x = 10$, som gir $x = 2$. Setter vi dette inn i den andre ligningen, får vi $y = 3$. Dermed er $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (som vi ser stemmer).

b) Den karakteristiske ligningen er

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1.1 - \lambda & 1.2 \\ 0.3 & 0.2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1.1 - \lambda)(0.2 - \lambda) - 1.2 \cdot 0.3 = \lambda^2 - 1.3\lambda - 0.14.$$

Denne annengradsligningen har løsningene

$$\lambda = \frac{1.3 \pm \sqrt{1.3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0.14)}}{2} = \frac{1.3 \pm \sqrt{2.25}}{2} = \frac{1.3 \pm 1.5}{2} = \begin{cases} 1.4 \\ -0.1 \end{cases}$$

Egenverdiene er altså $\lambda_1 = 1.4$ og $\lambda_2 = -0.1$.

c) Vi finner først en egenvektor $\mathbf{v}_1$ til λ_1. Den må tilfredsstille

$$\mathbf{0} = (A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1.1 - 1.4 & 1.2 \\ 0.3 & 0.2 - 1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.2 \\ 0.3 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dette gir ligningene

$$-0.3x + 1.2y = 0$$
$$0.3x - 1.2y = 0$$

som begge er ekvivalente med $x = 4y$. Velger vi $y = 1$, får vi $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vi finner så en egenvektor $\mathbf{v}_2$ til λ_2. Den må tilfredsstille

$$\mathbf{0} = (A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1.1 - (-0.1) & 1.2 \\ 0.3 & 0.2 - (-0.1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.2 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dette gir ligningene

$$1.2x + 1.2y = 0$$
$$0.3x + 0.3y = 0$$

som begge er ekvivalente med $x = -y$. Velger vi $y = 1$, får vi $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Antall dyr etter n år er gitt ved

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ved hjelp av a) kan vi skrive begynnelsestilstanden $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 5000 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{bmatrix} 5000 \\ 5000 \end{bmatrix} = 2000 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 3000 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \left(2000 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 3000 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= 2000\, M^n \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 3000\, M^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2000 \cdot 1.4^n \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 3000 \cdot (-0.1)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8000 \cdot 1.4^n - 3000 \cdot (-0.1)^n \\ 2000 \cdot 1.4^n + 3000 \cdot (-0.1)^n \end{bmatrix}$$

Bestanden etter n år er altså:

$$x_n = 8000 \cdot 1.4^n - 3000 \cdot (-0.1)^n$$
$$y_n = 2000 \cdot 1.4^n + 3000 \cdot (-0.1)^n$$

Ser vi på grenseverdiene, har vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8000 \cdot 1.4^n - 3000 \cdot (-1)^n}{2000 \cdot 1.4^n + 3000 \cdot (-1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8000 - 3000 \cdot \frac{(-0.1)^n}{1.4^n}}{2000 + 3000 \cdot \frac{(-0.1)^n}{1.4^n}} = \frac{8000}{2000} = 4.$$

I det lange løp er det altså fire ganger så mange unge dyr som gamle.

Oppgave 6. a) Egenverdiene er gitt ved

$$0 = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2.$$

Denne annengradsligningen har løsningene

$$\lambda = \frac{a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ac - b^2)}}{2}$$

$$= \frac{a + c \pm \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2}}{2}$$

$$= \frac{a + c \pm \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2}}{2}$$
$$= \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$$

der vi har brukt første og annen kvadratsetning inni kvadratroten. Legg merke til at uttrykket inni kvadratroten er ikke-negativt, og at vi derfor alltid har (reelle) egenverdier,

b) Hvis $(a - c)^2 + 4b^2 \neq 0$ har vi to ulike egenverdier, og de tilhørende egenvektorene er da lineært uavhengige. Dermed har vi en basis av egenvektorer.

Hvis, på den annen side, $(a - c)^2 + 4b^2 = 0$, så må vi ha $a = c$ og $b = 0$. Altså er A en diagonalmatrise $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, og følgelig er *alle* (ikke-null) vektorer egenvektorer med egenverdi a. Dermed har vi også i dette tilfellet en basis av egenvektorer.