Prøveeksamen 2 i MAT1080, H25

Denne prøveeksamenen har 12 delspørsmål (1, 2a), 2b) osv.) og burde tilsvare et normalt eksamenssett i arbeidsmengde og vanskelighetsgrad. På eksamen vil vanligvis alle delspørsmålene telle like mye (jeg har satt på poeng slik det vil stå på den virkelige eksamenen). Eksamenstiden er 4 timer, og det er lurt å sette av 4 timer til å arbeide sammenhengende med en prøveeksamen for å få en følelse med eksamensformatet.

Oppgave 1. (10 poeng) Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 1 \\ -x + 3y + z &= 1 \\ 2x - 4y &= 1 \end{aligned}$$

Oppgave 2. (10 poeng) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}.$$

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi studere funksjonen

$$f(x) = x^3 e^{-x} \quad \text{der } x \in [-1, 10].$$

a) (10 poeng) Bestem hvor f vokser og hvor den avtar.

b) (10 poeng) Finn maksimums- og minimumsverdien til f.

c) (10 poeng) Finn vendepunktene til f og avgjør hvor grafen krummer opp og hvor den krummer ned.

d) (10 poeng) Lag en skisse av grafen der du markerer ekstremalpunktene og vendepunktene.

Oppgave 4.

a) (10 poeng) Avgjør om den kvadratiske formen $f(x, y) = 6x^2 + 6xy - 2y^2$ er positiv definitt.

b) (10 poeng) Finn egenvektorene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Oppgave 5. Et bibliotek har to filialer A og B. Bøker man har lånt, kan leveres inn igjen ved begge filialene uavhengig av hvor de ble lånt. Bibliotekarene tar en opptelling i begynnelsen av hvert år. Den viser at av de bøkene som var i filial A i begynnelsen av et år, vil 80 % være i filial A året etter, mens 15 % vil være i filial B. Resten av bøkene vil være mistet eller makulert. Opptellingen viser også at av de bøkene som var i filial B i begynnelsen av et år, vil 20 % være i filial A året etter, mens 70 % vil være i filial B, og resten vil være mistet eller makulert.

a) (10 poeng) Finn en matrise M slik at dersom det i begynnelsen av et år er x og y bøker i filialene A og B, så vil fordelingen x' og y' av disse bøkene året etter være gitt ved

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Regn også ut M^2.

b) (10 poeng) I begynnelsen av et år er det 100 000 bøker i hver av filialene. Hvor mange av disse bøkene er det i hver av filialene to år etter? Hvor mange av de opprinnelige bøkene er mistet eller makulert?

Oppgave 6. (10 poeng) Du skal lage en kasse med volum $1\,\mathrm{m}^3$. Lokket til kassen er laget av et materiale som er tre ganger så dyrt per kvadratmeter som materialet i resten av kassen. Hvordan skal du velge dimensjonene i kassen for å få den billigst mulig?

Oppgave 7. (10 poeng) Vi kaller en $n \times n$-matrise C et *kvadrat* dersom det finnes en $n \times n$-matrise D slik at $D^2 = C$. Vis at hvis C er et kvadrat, så er $\det(C) \geq 0$. Bruk dette til å vise at $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *ikke* er et kvadrat.

LYKKE TIL!