Løsningsforslag til Prøveeksamen 2 i MAT1080, H25

Oppgave 1. Vi radreduserer den utvidede matrisen til ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{III-2I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -8 & -8 & -1 \end{bmatrix} \overset{III+\frac{8}{5}II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{bmatrix}.$$

Setter vi inn variablene igjen, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 1 \\ 5y + 5z &= 2 \\ 0z &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

som åpenbart ikke har noen løsninger. Dermed har heller ikke det opprinnelige ligningssystemet løsninger.

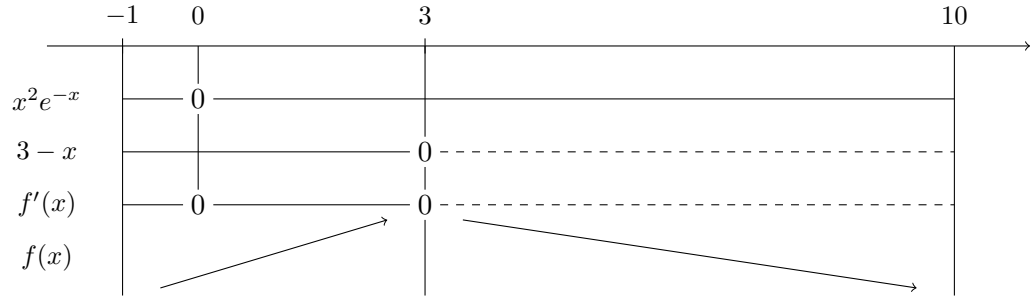
Oppgave 2. Siden både teller og nevner går mot 0, kan vi bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Oppgave 3. a) Vi deriverer f med produktregelen:

$$f'(x) = 3x^2e^{-x} + x^3(-e^{-x}) = x^2(3-x)e^{-x}.$$

Dette gir følgende fortegnsskjema.



Vi ser at f vokser på intervallet $[-1, 3]$ og avtar på $[3, 10]$.

b) De kritiske punktene er de stasjonære punktene 0, 3 og endepunktene -1 og 10. Fra fortegnsskjemaet ser vi at 0 er et terrassepunkt, at 3 er et lokalt maksimum, og at -1 og 10 er lokale minimumspunkter. Ved

ekstremalverdisetningen må f ha et maksimumspunkt, og siden 3 er den eneste kandidaten, er $f(3) = 3^3e^{-3} = 27e^{-3} \approx 1.344$ maksimumverdien. Sammenligner vi de to lokale mimimumspunktene, ser vi at funksjonsverdier er negativ i -1 og positiv i 10, så mimimumsverdien er $f(-1) = -e \approx -2.718$.

c) Vi finner først den dobbeltderiverte til f ved produktregelen:

$$f''(x) = \left((3x^2 - x^3)e^{-x}\right)' = (6x-3x^2)e^{-x}+(3x^2-x^3)e^{-x}(-1) = x(x^2-6x+6)e^{-x}.$$

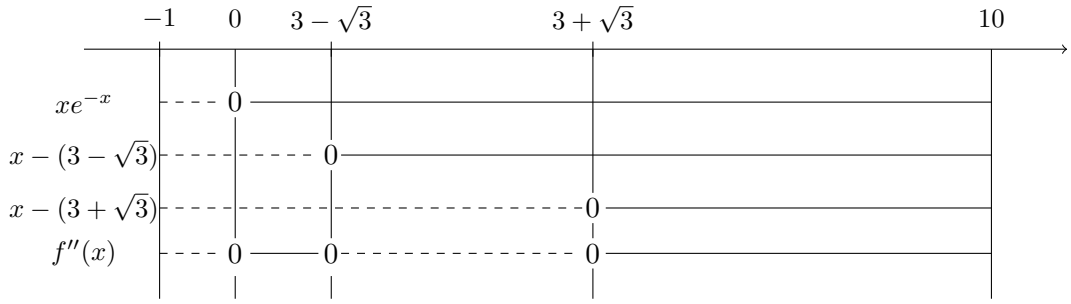
For å komme videre må vi faktorisere annengradsuttrykket, og vi løser derfor ligningen $x^2 - 6x + 6 = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}.$$

Dermed har vi

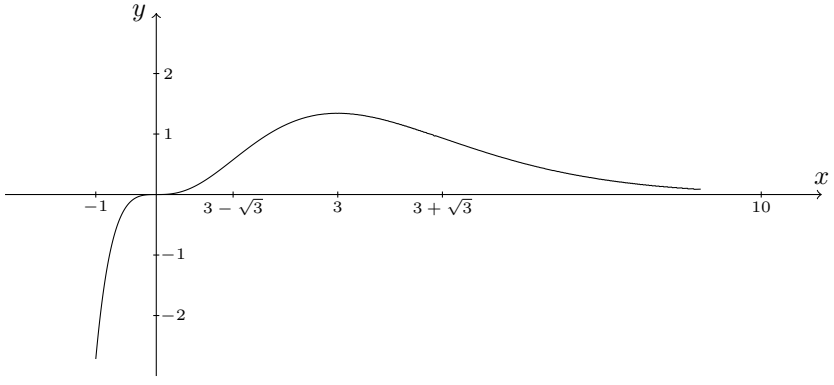
$$f''(x) = x\left(x - (3 - \sqrt{3})\right)\left(x - (3 + \sqrt{3})\right)e^{-x}.$$

Fortegnsskjemaet for den annenderiverte blir dermed:



Fortegnsskjemaet viser at f har vendepunkter i 0, $3-\sqrt{3}$ og $3+\sqrt{3}$. Funksjonen krummer oppover i intervallene $[0, 3-\sqrt{3}]$ og $[3+\sqrt{3}, 10]$ og den krummer nedover i intervallene $[-1, 0]$ og $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$.

d) Figuren nedenfor viser grafen til f:



Oppgave 4. a) Vi kan skrive den kvadratiske formen som

$$f(x, y) = [x, y]\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Det er egenverdiene til $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ som avgjør hva slags type f er, og for å finne dem løser vi den karakteristiske ligningen

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 21.$$

Løsningene er

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \begin{cases} 7 \\ -3 \end{cases}$$

Siden den ene egenverdien er negativ, er f ikke positiv definitt.

b) Siden vi allerede har funnet egenverdiene til A, kan vi finne egenvektorene på denne måten:

Egenvektor til $\lambda_1 = 7$: Vi må finne en vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{0} = (A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+3y \\ 3x-9y \end{bmatrix}.$$

Begge disse ligningene er ekvivalente med $x = 3y$, og hvis vi velger $y = 1$, får vi $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenvektor til $\lambda_2 = -3$: Vi må finne en vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{0} = (A - \lambda_3 I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x+3y \\ 3x+y \end{bmatrix}.$$

Begge disse ligningene er ekvivalente med $y = -3x$, og hvis vi velger $x = 1$, får vi $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Oppgave 5. a) Ifølge opplysningene i teksten er

$$x' = 0.8x + 0.2y$$
$$y' = 0.15x + 0.7y$$

som gir matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.15 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.15 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.15 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.15 & 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.7 \\ 0.15 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.15 & 0.15 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.67 & 0.3 \\ 0.225 & 0.52 \end{bmatrix}$$

b) Ifølge definisjonen av matrisemultiplikasjon er fordelingen to år senere gitt ved

$$M^2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.3 \\ 0.225 & 0.52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100\,000 \\ 100\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97\,000 \\ 74\,500 \end{bmatrix}$$

Siden det opprinnelig var 200 000 bøker totalt, og det etter to år er $97\,000 + 74\,500 = 171\,500$ bøker igjen, må 28 500 være mistet eller makulert.

Oppgave 6. Kall sidelengdene til kassen x, y og z, der z er høyden, og der alle målene er i meter. Hvis K er kostnaden per kvadratmeter for sidene og bunnen, blir den totale prisen

$$P = 3Kxy + Kxy + 2Kxz + 2Kyz = K(4xy + 2xz + 2yz),$$

der det første leddet $3Kxy$ er kostnaden for toppen. Siden volumet er $1\,\mathrm{m}^3$, har vi $xyz = 1$, som gir $z = \frac{1}{xy}$. Setter vi dette inn i uttrykket for P, får vi

$$P(x, y) = K\left(4xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}\right).$$

Vi partiellderiverer og får:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = K\left(4y - \frac{2}{x^2}\right)$$

og

$$\frac{\partial P}{\partial y} = K\left(4x - \frac{2}{y^2}\right)$$

Vi må finne ut når begge de partiellderiverte er 0, og det gir ligningene

$$2y = \frac{1}{x^2} \quad \text{og} \quad 2x = \frac{1}{y^2}.$$

Fra den første ligningen får vi $y = \frac{1}{2x^2}$, som innsatt i den andre gir $2x = 4x^4$. Vi kan åpenbart se bort fra løsningen $x = 0$, og står da igjen med $1 = 2x^3$, som gir $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Dermed er $y = \frac{1}{2\frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (siden problemet er symmetrisk i x og y, er det ikke så overraskende at vi har $x = y$ i den optimale løsningen). Til slutt har vi $z = \frac{1}{xy} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2} = \sqrt[3]{4}$.

Oppgave 7. Regelen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ forteller oss at hvis C er et kvadrat $C = D^2$, så er $\mathrm{C} = \det(D^2) = \det(D)^2 \geq 0$. Hvis $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, så er

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 < 0,$$

og følgelig kan ikke C være et kvadrat.