Prøveeksamen 3 i MAT1080, H25

Denne prøveeksamenen har 12 delspørsmål (1a), 1b), 2) osv.) og burde tilsvare et normalt eksamenssett i arbeidsmengde og vanskelighetsgrad. På eksamen vil vanligvis alle delspørsmålene telle like mye (jeg har satt på poeng slik det vil stå på den virkelige eksamenen). Eksamenstiden er 4 timer, og det er lurt å sette av 4 timer til å arbeide sammenhengende med en prøveeksamen for å få en følelse med eksamensformatet.

Oppgave 1. Finn grenseverdiene

a) (10 poeng)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 - 2x^4 - 3x^2 - 5}{7x^5 - 3x^3 + 2x - 4}$$

b) (10 poeng)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}.$$

Oppgave 2. (10 poeng) Finn arealet mellom grafene $y = \cos x$ og $y = \sin x$ når $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Oppgave 3. I denne oppgave er $f(x, y) = (x + xy)e^{x+y}$.

a) (10 poeng) Finn de første- og annenordens partiellderiverte til f.

b) (10 poeng) Finn de stasjonære punktene til f.

c) (10 poeng) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter eller lokale maksimumspunkter.

Oppgave 4. To firmaer, X og Y, konkurrerer om å levere dagligvarer hjem til folk. En markedsundersøkelse viser at av dem som bestiller varer fra X én uke, vil 90% bestille fra X uken etter, mens 10% vil bestille fra Y. Av dem som bestiller fra Y én uke, vil 80% også bestille fra Y uken etter, mens 20% vil bestille fra X.

a) (10 poeng) Anta at det etter n uker er x_n husholdninger som bestiller varer fra firma X og y_n som bestiller fra firma Y. Finn en matrise M slik at
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

b) (10 poeng) En uke er det 13 200 husholdninger som bestiller varer fra X og 10 800 som bestiller varer fra Y. Hvor mange var det som bestilte fra hvert av firmaene uken før?

c) (10 poeng) Finn egenverdiene til M.

d) (10 poeng) Finn egenvektorene til M.

e) (10 poeng) Anta at det i uke 0 er 12 000 husholdninger som bestiller varer fra firma X og like mange som bestiller fra firma Y. Hvor mange bestiller fra henholdsvis X og Y i uke n? Hvordan vil kundene fordele seg mellom X og Y i det lange løp?

Oppgave 5. (10 poeng) Vis at egenverdiene til en 2×2-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

kan skrives som

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

og bruk dette til å finne en matrise som har en egenvektor, men ikke en basis av egenvektorer (det er mange muligheter).

LYKKE TIL!