Løsningsforslag til Prøveeksamen 3 i MAT1080, H25

Oppgave 1. a) Vi faktoriserer ut den høyeste potensen i teller og nevner:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-2x^4-3x^2-5}{7x^5-3x^3+2x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(3-2\frac{1}{x}-3\frac{1}{x^3}-5\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(7-3\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^4}-\frac{4}{x^5}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2\frac{1}{x}-3\frac{1}{x^3}-5\frac{1}{x^5}}{7-3\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^4}-\frac{4}{x^5}}=\frac{3}{7}.$$

b) Bruker vi L'Hôpitals regel to ganger, får vi:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin x+x\cos x}$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{1}{2}$$

Oppgave 2. I området fra 0 til $\frac{\pi}{4}$ ligger grafen til $y=\cos x$ over grafen $y=\sin x$ (de møtes i $x=\frac{\pi}{4}$). Dermed er arealet

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)=\sqrt{2}-1$$

Oppgave 3. a) Vi regner ut de førstederiverte med produktregelen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(1+y)e^{x+y}+(x+xy)e^{x+y}=(1+y+x+xy)e^{x+y}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{x+y}+(x+xy)e^{x+y}=(2x+xy)e^{x+y}=x(2+y)e^{x+y}.$$

Deriverer vi en gang til på samme måte, får vi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(1+y)e^{x+y}+(1+y+x+xy)e^{x+y}=(2+2y+x+xy)e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(2+y)e^{x+y}+(2x+xy)e^{x+y}=(2+y+2x+xy)e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=xe^{x+y}+(2x+xy)e^{x+y}=(3x+xy)e^{x+y}$$

b) For å finne de stasjonære punktene, må vi løse ligningene

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(1+y+x+xy)e^{x+y}=0$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x(2+y)e^{x+y}=0.$$

Den nederste ligningen har løsningene $x = 0$ og $y = -2$. Setter vi $x = 0$ inn i den øverste ligningen, får vi

$$(1 + y)e^{0+y} = 0$$

som har løsningen $y = -1$, og følgelig er $(0, -1)$ et stasjonært punkt. Setter vi isteden $y = -2$ inn i den øverste ligningen, får vi

$$(1 - 2 + x - 2x)e^{x-2} = 0$$

som gir $x = -1$, og følgelig er $(-1, -2)$ et stasjonært punkt. De stasjonære punktene er altså $(0, -1)$ og $(-1, -2)$.

Kommentar: Hvis vi hadde observert at $\frac{\partial f}{\partial x} = (1 + y + x + xy)e^{x+y} = (1 + x)(1 + y)e^{x+y}$, ville vi ha fått litt lettere regninger ovenfor.

b) Vi sjekker de stasjonære punktene hver for seg.

Punktet $(0, -1)$: Vi har

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) = \big(2 + 2(-1) + 0 + 0 \cdot (-1)\big)e^{0+(-1)} = 0$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1) = \big(2 + (-1) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)\big)e^{0+(-1)} = e^{-1}$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \big(3 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)\big)e^{0+(-1)} = 0$$

Dermed er Hesse-determinanten

$$Hf(0, -1) = AC - B^2 = 0 - e^{-2} < 0,$$

så $(0, -1)$ er et sadelpunkt.

Punktet $(-1, -2)$: Vi har

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -2) = (2 + 2 \cdot (-2) + (-1) + (-1)(-2))e^{-1-2} = -e^{-3}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -2) = (2 + (-2) + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2))e^{-1-2} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -2) = (3 \cdot (-1) + (-1)(-2))e^{-1-2} = -e^{-3}$$

Dermed er Hesse-determinanten

$$Hf(-1, -2) = AC - B^2 = (-e^{-3})(-e^{-3}) - 0^2 = e^{-6} > 0,$$

så $(-1,-2)$ er enten et lokalt maksimumspunkt eller et lokalt minimumspunkt. Siden $A < 0$, er $(-1,-2)$ et lokalt maksimum.

Oppgave 4. a) Ifølge teksten er

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.9x_n + 0.2y_n \\ y_{n+1} &= 0.1x_n + 0.8y_n, \end{aligned}$$

og følgelig er

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Vi har altså $M = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$.

b) Siden $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, er $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$. Ifølge formelarket er

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.7} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.1 & 0.9 \end{bmatrix},$$

og dermed er

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{0.7} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13\,200 \\ 10\,800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{bmatrix}$$

Uken før var det altså 12 000 som bestilte fra hvert av firmaene.

c) Fra den karakteristiske ligningen

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.9 - \lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7$$

får vi

$$\lambda = \frac{-(-1.7) \pm \sqrt{(-1.7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.7}}{2} = \frac{1.7 \pm \sqrt{0.09}}{2} = \frac{1.7 \pm 0.3}{2} = \begin{cases} 1 \\ \\ 0.7 \end{cases}.$$

Egenverdiene er altså $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0.7$.

d) Vi finner én egenvektor av gangen:

Egenvektor til λ_1: Vi må finne en ikke-null vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{0} = (M - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1x + 0.2y \\ 0.1x - 0.2y \end{bmatrix}.$$

Dette gir to ligninger som begge er ekvivalente med $x = 2y$, og velger vi $y = 1$, får vi $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenvektor til λ_2: Vi må finne en ikke-null vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{0} = (M - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2x + 0.2y \\ 0.1x + 0.1y \end{bmatrix}.$$

Dette gir to ligninger som begge er ekvivalente med $x = -y$, og velger vi $y = 1$, får vi $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

e) Vi skriver først begynnelsestilstanden $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene til M:

$$\begin{bmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - y &= 12\,000 \\ x + y &= 12\,000 \end{aligned}$$

Legger vi sammen ligningene, får vi $3x = 24\,000$, så $x = 8\,000$, og setter vi dette inn i en av ligningene, ser vi at $y = 4\,000$. Følgelig er

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{bmatrix} = 8\,000 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\,000 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 8\,000\mathbf{v}_1 + 4\,000\mathbf{v}_2.$$

Siden $\begin{bmatrix} x_n \\ x_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, får vi videre at

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n (8\,000\mathbf{v}_1 + 4\,000\mathbf{v}_2) = 8\,000\lambda_1^n \mathbf{v}_1 + 4\,000\lambda_2^n \mathbf{v}_2$$

$$= 8\,000 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\,000 \cdot 0.7^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16\,000 \\ 8\,000 \end{bmatrix} + 0.7^n \begin{bmatrix} -4\,000 \\ 4\,000 \end{bmatrix}$$

Antall kunder i uke n er altså henholdsvis $x_n = 16\,000 - 4\,000 \cdot 0.7^n$ og $y_n = 8\,000 + 4000 \cdot 0.7^n$. Siden $0.7^n \to 0$ når $n \to \infty$, vil antall kunder stabilisere seg på henholdsvis 16 000 for firma X og 8 000 for firma Y.

Oppgave 5. Den karakteristiske ligningen

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

har løsningene

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ad-bc)}}{2}$$

$$= \frac{a+d \pm \sqrt{a^2+2ad+d^2-4ad+4bc}}{2}$$

$$= \frac{a+d \pm \sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}}{2}$$

$$= \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$

Vi vet at dersom vi har to ulike egenverdiene, så er de tilhørende egenvektorene lineært uavhengige og vil dermed danne en basis. Siden matrisen skal ha en (reell) egenvektor, kan ikke uttrykket $(a-d)^2+4bc$ inni roten være negativt, så vår eneste mulighet er å se på tilfellet der $(a-d)^2+4bc = 0$. La oss prøve å sette $a = d = 1$, $b = 1$ og $c = 0$ (det nytter ikke å sette både b og c lik null siden vi da får diagonalmatrisen som har alle vektorer som egenvektorer). Da får vi matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ som ifølge formelen vår bare har egenverdien $\lambda = 1$. En egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ må oppfylle

$$\mathbf{0} = (A - \lambda I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir ligningen $y = 0$ (mens x kan velges fritt), og alle egenvektorer er dermed av formen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, og kan åpenbart ikke danne en basis (mange andre valg av a, b, c og d vil også fungerer).

SLUTT