MAT1080, H-25

Spektralteoremet, kvadratiske former og annenderiverttesten

I dette notatet skal vi knytte noen forbindelser mellom ulike deler av pensum og klargjøre noen punkter som kanskje ikke kommer så godt frem i kompendiet.

1 Spektralteoremet for symmetriske matriser

Det hadde vært praktisk om alle matriser hadde en basis av egenvektorer, men slik er det ikke. Vi har f.eks. sett at matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ bare har én egenverdi $\lambda = 1$, og at de eneste egenvektorene er av formen $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$, og det er ikke nok til å lage en basis.

Situasjonen er en helt annen om vi innskrenker oss til å se på symmetriske matriser. Da finnes det alltid en basis av egenvektorer, og vi kan til og med velge denne basisen til å være *ortonormal*. Dette betyr at alle vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i basisen har lengde 1 og står ortogonalt (normalt) på hverandre – med andre ord

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

Teorem 1 (Spektralteoremet for symmetriske matriser) *Anta at A er en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da finnes det en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer til A.*

Siden beviset er ganske langt og bruker redskaper vi ikke har, skal vi ikke prøve å bevise dette teoremet her .

Ortonormale basiser har mange fordeler. Hvis $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$ og $\mathbf{y} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$, så er for eksempel

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Dette er fordi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j(\mathbf{v_i} \cdot \mathbf{v_j}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

der vi i det siste steget har brukt at

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

Med en ortonormal basis er det også raskt å finne ut hvordan man kan skrive en vilkårlig vektor som en lineærkombinasjon av basisvektorene:

Setning 2 *Anta at* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,...,$\mathbf{v}_n$ *er en ortonormal basis for* $\mathbb{R}^n$. *For ethvert element* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *er da*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

der $c_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ *for* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bevis: Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,...,$\mathbf{v}_n$ er en basis, vet vi at $\mathbf{v}$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_i\mathbf{v}_i + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{v}_i$ på begge sider, får vi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i = c_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i + c_2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \cdots + c_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \cdots + c_n\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i = c_i$$

der vi igjen har brukt at

$$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

□

2 Kvadratiske former

Anta at vi har en kvadratisk form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}(b_{ij} + b_{ji})x_ix_j$$

Setter vi $a_{ij} = \frac{b_{ij}+b_{ji}}{2}$ som i kompendiet, kan vi skrive dette som

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

der $A = [a_{ij}]$ er en symmetrisk matrise. Dette betyr at

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

Fra spektralteoremet vet vi at det finnes en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Enhver vektor kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n,$$

og ganger vi med A, får vi

$$A\mathbf{x} = \lambda_1 x_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2 x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n x_n\mathbf{v}_n.$$

Dermed er

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

der vi har brukt at basisen er ortonormal. Vi ser at dersom alle egenverdiene er (strengt) positive, er $f(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, og dermed er $\mathbf{0}$ det (eneste) globale minimumspunktet. Er alle egenverdiene (strengt) negative, er $f(\mathbf{x}) < 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, og dermed er $\mathbf{0}$ det (eneste) globale maksimumspunktet. Hvis noen av egenverdiene er 0, mens alle de andre har samme fortegn, er $\mathbf{0}$ fortsatt et globalt maksimum eller minimum, men det er ikke lenger det eneste. Dersom vi har egenverdier med både positive og negative fortegn, kan vi få $f(\mathbf{x})$ både negativ og positiv ved å gjøre ulike valg av $\mathbf{x}$, og dermed er $\mathbf{0}$ hverken et maksimums- eller et minimumspunkt.

I kompendiet brukes resultatet ovenfor til å klassifisere kvadratiske former: f er *positiv definitt* hvis $f(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq 0$ (dvs. hvis alle egenverdiene er strengt positive), og den er *positiv semidefinitt* hvis $f(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x} \neq 0$ (dvs. hvis alle egenverdiene er ikke-negative). *Negativ definitt* og *negativ semidefinitt* er definert tilsvarende,

3 Annenderiverttesten i nytt perspektiv

Vi skal nå se hvordan spektralteoremet kaster nytt lys på annenderiverttesten. Dersom $f(x_1, \ldots, x_n)$ er en to ganger deriverbar funksjon av n variable, kan vi skrive opp alle de annenordens partiellderiverte som en $n \times n$ matrise:

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Vi kaller dette *Hesse-matrisen* til f i punktet $\mathbf{a}$.

Vi husker fra kompendiet at dersom de blandede partiellderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ er kontinuerlige, så er de like. Det betyr at Hesse-matrisen $Hf(\mathbf{a})$ er symmetrisk. Fra spektralteoremet vet vi at $Hf(\mathbf{a})$ har en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ av egenvektorer med tilhørende egenverdier $\lambda_1(\mathbf{a})$, $\lambda_2(\mathbf{a})$, …, $\lambda_n(\mathbf{a})$ (noen av disse kan være like).

Dersom $\mathbf{a}$ er et stasjonært punkt for f (dvs. at alle partiellderiverte til f er 0 i $\mathbf{a}$), viser det seg at det er fortegnet til disse egenverdiene som avgjør om $\mathbf{a}$ er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et sadelpunkt: Hvis alle egenverdiene er positive, så er $\mathbf{a}$ et lokalt minimum, hvis alle er negative, så er $\mathbf{a}$ et lokalt maksimum, og hvis det finnes egenverdier med motsatte fortegn, så er $\mathbf{a}$ et sadelpunkt. (Legg merke til likheten med det vi fant for kvadratiske former – hvis f er en kvadratisk form som ovenfor, så er $Hf(\mathbf{a}) = 2A$ for alle $\mathbf{a}$.)

Den intuitive forklaringen er at hvis vi starter i punktet $\mathbf{a}$ og beveger oss parallelt med egenvektoren $\mathbf{v}_i$, så vil funksjonen vokse hvis den tilhørende egenverdien λ_i er positiv, og avta hvis λ_i er negativ. Har vi derfor egenverdier med motsatte fortegn, vil funksjonen vokse i noen retninger og avta i andre, og $\mathbf{a}$ er dermed et sadelpunkt. Dersom alle egenverdiene har samme fortegn, vil funksjonen vokse eller avta uansett hvilken retning vi går i, og $\mathbf{a}$ er dermed enten et minimums- eller et maksimumspunkt.

Her en presise versjonen av annenderiverttesten for funksjoner av n variable:

Teorem 3 (Annenderiverttesten) *La $\mathbf{a}$ være et stasjonært punkt for en funksjon f av n variable. Anta at de annenordens partiellderiverte til f er kontinuerlige i en omegn om $\mathbf{a}$. Da gjelder:*

a) *Hvis alle egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er (strengt) positive, så er $\mathbf{a}$ et lokalt minimumspunkt.*

b) *Hvis alle egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er (strengt) negative, så er $\mathbf{a}$ et lokalt maksimumspunkt.*

c) *Hvis $Hf(\mathbf{a})$ har både (strengt) positive og (strengt) negative egenverdier, så er $\mathbf{a}$ et sadelpunkt.*

Dersom noen av egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er null og de andre har samme fortegn, så gir testen ingen konklusjon.

Grunnen til at vi ikke kan si noe sikkert i det siste tilfellet, er at dersom vi beveger oss parallelt med en egenvektor med egenverdi 0, så kan funksjonen vokse eller avta uten at det er mulig å avgjøre dette bare ved å se på egenverdien.

Vi skal ikke prøve å bevise annenderiverttesten her, men nevner at ideen bak beviset er å sammenligne oppførselen til funksjonen f med oppførselen til den kvadratiske formen definert av Hesse-matrisen $Hf(\mathbf{a})$.

I seksjon 2.9 i kompendiet støtte vi på en annenderiverttest for funksjoner av to variable. Den så helt annerledes ut, nemlig (jeg har endret litt på notasjonen):

Korollar 4 (Annenderiverttesten i to variable) *La* $\mathbf{a}$ *være et stasjonært punkt for en funksjon* f *av to variable. Anta at de annenordens partiellderiverte er kontinuerlige i en omegn om* $\mathbf{a}$*. La*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a})$$

og la $D(\mathbf{a})$ *være determinanten til Hesse-matrisen:* $D(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$*. Da gjelder*

(i) *Hvis* $D(\mathbf{a}) < 0$*, så er* $\mathbf{a}$ *et sadelpunkt.*

(ii) *Hvis* $D(\mathbf{a}) > 0$ *og* $A > 0$*, så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimum.*

(iii) *Hvis* $D(\mathbf{a}) > 0$ *og* $A < 0$*, så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimum.*

Hvis $D(\mathbf{a}) = 0$*, gir testen ingen konklusjon.*

Hva er sammenhengen mellom de to utgavene av annenderiverttesten? Vel, hvis funksjonen bare har to variable, så finnes det bare to egenverdier $\lambda_1(\mathbf{a})$ og $\lambda_2(\mathbf{a})$. Det viser seg at determinanten til Hesse-matrisen er lik produktet av egenverdiene (jeg skal vise dette om et øyeblikk), det vil si $D(\mathbf{a})(\mathbf{a}) = \lambda_1(\mathbf{a})\lambda_2(\mathbf{a})$. Hvis de to egenverdien har motsatt fortegn, er $D(\mathbf{a}) = \lambda_1(\mathbf{a})\lambda_2(\mathbf{a}) < 0$, og ifølge teoremet har vi et sadelpunkt. Hvis de to egenverdiene har samme fortegn, så er $D(\mathbf{a}) = \lambda_1(\mathbf{a})\lambda_2(\mathbf{a}) > 0$, og ifølge teoremet har vi enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum. I korollaret ser vi derfor på hvordan funksjonen oppfører seg i x-retning for å avgjøre om vi har et maksimum eller minimum.

For å fullføre argumentet ovenfor, må vi vise at hvis λ_1, λ_2 er egenverdiene til en 2×2-matrise $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, så er $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$. Dette er ren algebra: Det karakteristiske polynomet er

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + \det(A).$$

Siden røttene i dette polynomet er λ_1 og λ_2, kan det faktoriseres som

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

og multipliserer vi ut dette uttrykket, får vi

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.$$

Sammenligner vi dette med uttrykkert ovenfor, ser vi at

$$\lambda_1\lambda_2 = \det(A).$$

Argumentet kan generaliseres til $n \times n$-matriser.