MAT1080: Litt mer om substitusjon

Anta at F er en antiderivert til funksjonen f. Da er

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Det er lett å se at dette stemmer: Deriverer vi høyresiden i uttrykket, får vi ved kjerneregelen

$$\Big(F(g(x))\Big)' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

som viser at $F(g(x))$ er en antiderivert til $f(g(x))g'(x)$.

En grei metode for å utføre slike integrasjoner er å innføre en ny variabel $u = g(x)$. Deriverer vi og bruker Leibniz' notasjon $\frac{du}{dx}$ for den deriverte, får vi

$$\frac{du}{dx} = g'(x).$$

Later vi som om $\frac{du}{dx}$ er en brøk og ganger dx over på den andre siden, får vi $du = g'(x)\,dx$. Setter vi dette inn i integralet, har vi

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

La oss bruke denne teknikken på et eksempel:

Eksempel 1: Vi skal løse integralet $\int xe^{x^2}\,dx$. Vi setter $u = e^{x^2}$ og deriverer: $\frac{du}{dx} = 2x$. Dette gir $du = 2x\,dx$, som kan omskrives til $dx = \frac{du}{2x}$. Vi setter inn i integralet og får

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int xe^u\,\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

□

Det kan se ut som om vi hadde flaks i denne utregningen siden de to forekomsten av x i det nest siste integralet faller mot hverandre. Dette skyldes at vi har den deriverte av $u = x^2$ som en "skjult" faktor i integralet (vi har x istedenfor $\frac{du}{dx} = 2x$, men det er nært nok). Hva skjer dersom vi ikke har flaks?

Vi kan fortsatt bruke substitusjon, men det lønner seg å regne på en litt annen måte. Anta at vi starter med et integral

$$\int f(g(x))\,dx$$

der den "magiske faktoren" $g'(x)$ mangler. Vi setter $u = g(x)$, og løser denne ligningen med hensyn på x slik at vi får et uttrykk $x = h(u)$. Deriverer vi dette uttrykket med hensyn på u, får vi $\frac{dx}{du} = h'(u)$, som gir $dx = h'(u)\,du$. Setter vi dette inn i integralet, ser vi at

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)h'(u)\,du.$$

I mange tilfeller er dette integralet enklere å løse enn det opprinnelige, men det er slett ikke sikkert. Riktignok er vi kvitt den irriterende funksjonen $g(x)$ i uttrykket $f(g(x))$, men isteden har vi fått en faktor $h(x)$ som ofte kan ødelegge. Her er et eksempel hvor metoden fungerer:

Eksempel 2: Vi skal løse integralet

$$I = \int \sin\sqrt{x}\, dx.$$

Vi prøver å substituere $u = \sqrt{x}$. Da er $x = u^2$ og $\frac{dx}{du} = 2u\, du$. Dette gir

$$I = \int \sin u \cdot 2u\, du = \int 2u \sin u\, du.$$

Vi gjenkjenner dette som et integral vi kan løse ved delvis integrasjon. Vi setter $U = 2u$, $V' = \sin u$, og får $U' = 2$, $V = -\cos u$. Dette gir

$$I = -2u\cos u - \int 2\cdot(-\cos u)\, du = -2u\cos u + 2\int \cos u\, du = -2u\cos u + 2\sin u + C.$$

Til slutt må vi huske å gå tilbake til den opprinnelige variabelen:

$$I = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C.$$

□

I regningene ovenfor har vi utført en del tvilsomme regninger med "differensialene" du og dx, og vi trenger derfor en forklaring på hvorfor metoden er riktig. Vi starter igjen med integralet

$$\int f(g(x))\, dx.$$

Hvis $x = h(u)$ er den omvendte funksjonen til $u = g(x)$, har vi $x = h(g(x))$. Deriverer vi på begge sider, får vi $1 = h'(g(x))g'(x)$. Dermed kan vi skrive om integralet vårt som

$$\int f(g(x))\, dx = \int f(g(x)) \cdot 1\, dx = \int f(g(x))h'(g(x))g'(x)\, dx.$$

Vi har nå fått inn den "magiske faktoren" $g'(x)$, og kan fortsette på vanlig måte ved å sette $u = g(x)$ og få $du = g'(x)\, dx$. Det gir

$$\int f(g(x))\, dx = \int f(g(x))h'(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)h'(u)\, du,$$

akkurat som vi skulle vise.