Utvidet rapport fra forelesningen 27. november

Den elektroniske pennen sviktet, så jeg måtte forelese på tavlen. Siden dette var siste forelesning, kommer det her et mer detaljert referat enn vanlig.

Jeg begynte med å gjennomgå en oppgave om matriser, egenverdier og egenvektorer formulert som en typisk eksamensoppgave. Jeg bruker oppgaveformuleringen her og legger til løsningene i parentes.

Oppgave 1. To politiske partier, I og II, kjemper om makten i et land, og en avis gjennomfører ukentlige meningsmålinger. I uke 0 er det 11 millioner som sier de vil stemme på parti I (det tradisjonelle regjeringspartiet) mens bare 1 million vil stemme på det nye partiet II. En undersøkelse viser ellers:

(i) Av dem som vil stemme på I én uke, vil 90 % også stemme på I uken etter, mens 10 % vil stemme på II.

(ii) Av dem som vil stemme på II én uke, vil 70 % også stemme på II uken etter, mens 30 % vil stemme på I.

Vi lar x_n og y_n være antallet (i millioner) som vil stemme på henholdsvis I og II i uke n.

a) Finn en matrise M slik at $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$.
(Svar: $M = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$.)

b) Finn egenverdiene til M.
(Svar: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.6$.)

c) Finn egenvektorene til M.
(Svar: For eksempel $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

d) Skriv begynnelsestilstanden $\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene.
(Svar: $\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.)

e) Hvor mange (i millioner) er det som vil stemme I og hvor mange vil stemme II i uke n?
(Svar: $x_n = 9 + 2 \cdot 0.6^n, y_n = 3 - 2 \cdot 0.6^n$.)

f) Hvordan vil velgerne fordele seg mellom partiene i det lange løp?
(Svar: 3 ganger så mange vil stemme I som II.)

Oppgaven ovenfor tok hele første forelesningstime. Etter pausen regnet jeg først denne oppgaven:

Oppgave 2: Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ 2x + 2y - 4z &= 2 \\ 4x - 5y + z &= 13 \end{aligned}$$

(Svar: z kan velges fritt, men så må vi sette $y = z - 1$, $x = z + 2$.)

Til slutt regnet jeg:

Oppgave 3: Avgjør om den kvadratiske formen

$$f(x, y) = -x^2 + 4xy + 2x^2$$

er positiv definitt eller positivt semi-definitt.
(Svar: Nei, den tilhørende symmetriske matrisen $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ har én positiv og én negativ egenverdi.)

Etter å regnet alle oppgavene, sa jeg noen ord om eksamen, men alt slik eksamensstoff vil komme på en egen side.