MAT 1080

1.2

1.2 Tallfølger

$\mathbb{N}$ = naturlige tall = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Def. 1.2.1: En tallfølge er en funksjon fra $\mathbb{N}$ inn i $\mathbb{R}$ (= desimaltall), skrives

$a_1, a_2, a_3, \ldots$, eller $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eller $\{a_n\}$

Så: $n \to a_n$ er funksjonen

Ehs: 1.) $a_n = 2n$; $2, 4, 6, 8, \ldots$

2.) $a_n = 3$; $3, 3, 3, 3, \ldots$

3.) $a_n = \frac{1}{n}$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Hva skjer når n vokser? Begrepet konvergens. Følgene i 2.) og 3.) er konvergente; de nærmer seg en grenseverdi.

Made with Goodnotes

Def 1.2.2: Vi sier at følgen (a_n) **konvergerer** mot L dersom a_n er så nær L vi bare vil hvis n er stor nok. Skriver da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{, eller } a_n \to L \text{ når } n\to\infty.$$

Følgen heter da **konvergent**.

Divergent: ikke konvergent

Eks: (a_n), der $a_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$ fordi $\frac{1}{n}$ er så nær 0 vi bare vil når n er stor nok.

Presist: For alle $\varepsilon > 0$, finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at:

for alle $n \geq N$ er $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Made with Goodnotes

Så: $\frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$ ⟹ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

og følgen (3) konstant lik 3

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3$$

Hva med (a_n), $a_n = 2n$?

Den er divergent, men vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (2n) = \infty$$

som betyr at hvor før en så stor er vil, bare n velges stor nok.

Presist: for alle M finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$n \geq N \implies a_n \geq M.$$

Made with Goodnotes

Regneregler for å finne grenseverdi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-5}{4n^2-6n+1}$$

← dele på n^2

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{4-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Kan altså "ta grenseverdi på hvert ledd":

$2 \to 2$ og $\frac{3}{n} \to 0$ og $\frac{5}{n^2} \to 0$

$\Rightarrow \left(2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right) \to 2+0+0=2$ osv.

Regel: $a_n \to a$ og $b_n \to b \Rightarrow$

$a_n + b_n \to a+b$

og $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ dersom $b_n, b \neq 0$.

Made with Goodnotes

Kalkulus handler mye om grenseverdier.

Viktig også for funksjoner:

Def. 1.2.3: La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$\lim_{t \to \infty} f(t) = L$ betyr "vi kan få $f(t)$ så nær L vi bare vil ved å velge t stor nok"

Også når x er nær et tall a:

$\lim_{t \to a} f(t) = L$ betyr "vi kan få $f(t)$ så nær L vi bare vil ved å velge t nær nok a, men $t \neq a$

NB: vi bryr oss ikke om hva som skjer i $t = a$, så kan hv. $f(a) \neq L$ eller også f ikke definert i a.

Made with Goodnotes

Eks: 1.) $\lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0$

2.) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 1$

3.) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 4x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{4}{x}} = \frac{1}{3}$

4.) $\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 2 \lim_{x \to 3} x + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

Faktisk, "ofte" er grenseverdien når $x \to a$ lik $f(a)$.

Def 1.2.5 Funksjonen f er *kontinuerlig* i $x = a$ dersom

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

→

Da er det altså lett å beregne grenseverdien

Made with Goodnotes

Vi sier at f er kontinuerlig hvis f er kontinuerlig i $x=a$ for alle a (i definisjonsområdet)

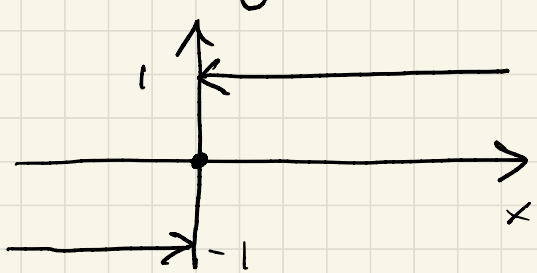
Mange funksjoner er kontinuerlige:

- polynomer
- sinus, cosinus,
- potensfunksjoner, e^x, $\log x$

Men f.eks. "fortegnsfunksjonen"

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x > 0 \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \\ -1 & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

er ikke kontinuerlig i $x=0$:



Asymptoter: les selv i heftet.

Made with Goodnotes