MAT 1080

1.3

1.3 Aritmetiske, alternerende og geometriske følger

Aritmetisk følge: $a_{n+1} = a_n + \alpha$ for et fast tal α, for hvert n, f.eks.

$2, 5, 8, 11, \ldots$ $(\alpha = 3)$

$1, 2, 3, 4, \ldots$ $(\alpha = 1)$

Geometrisk følge: $a_{n+1} = a_n \cdot \beta$ for et fast tal β, for hvert n, f.eks.

$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ $(\beta = 2)$

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ $(\beta = \frac{1}{3})$

Alternerende følge: skifter fortegn for hvert led, f.eks.

$3, -1, 2, -5, 6, \ldots$

Made with Goodnotes

Monotone følger:

voksende: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$

avtakende: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$

Teorem: En voksende følge er konvergent hvis og bare hvis den har en øvre skranke.

Øvre skranke betyr: $a_n \leq M$ for alle n, for et tall M.

Tilsvarende: nedre skranke: $\exists M : a_n \geq M$ for alle n. Og: en avtakende følge er konvergent hvis og bare hvis den har en nedre skranke.

Eks: $a_n = 3 - \frac{1}{n}$

er voksende og har øvre skranke ($M = 3$).

Og $\lim_{n \to \infty} a_n = 3$.

Made with Goodnotes

Bak detta (teoremet) ligger en viktig egenskap vid de reella talen:

- <u>Fullständighet</u>: en given delmängd av reella tal som har en övre skranka, har en <u>minsta övre skranke</u>.

<u>Rekka</u>: Från en följd $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kan vi definiera

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

för given n. Det ger en ny talföljd (s_n) som kallas en <u>rekka</u>.

T.ex. den geometriska följden

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

ger den geometriska rekkan (s_n) där

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} ar = a\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

när $r \neq 1$ (För $r = 1$: konstant följd först)

Made with Goodnotes

Hvis $-1 < r < 1$, vil $r^{n+1} \to 0$, så

$$\lim_{n \to \infty} \left(a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n \right) = \frac{a}{1-r}$$

$\square$

Made with Goodnotes