MAT 1080

2.1

KAP 2 DERIVASJON

2.1 Derivasjon av funk. i én variabel

Minner om:

Def. 2.1.1 La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, og $a \in \mathbb{R}$.

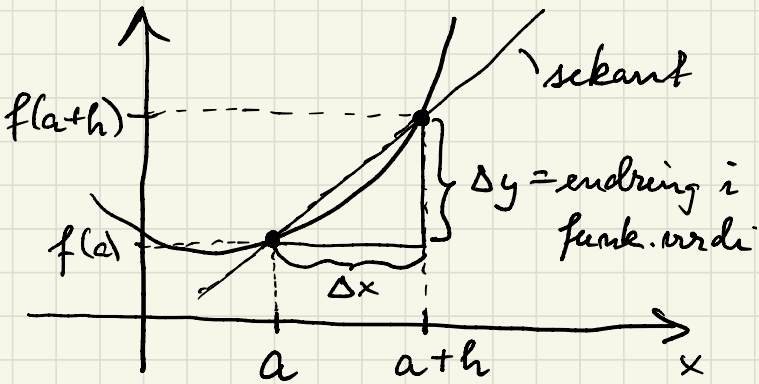
$\lim_{t \to a} f(t) = L$ betyr at vi kan få $f(t)$ så nær L vi bare vil ved å velge t nær nok a, men $t \neq a$

NB: vi bryr oss ikke om hva som skjer i $t = a$, så kan hve $f(a) \neq L$ eller også f ikke definert i a.

Og: Hvis $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, sier vi at f er kontinuerlig i $x = a$.

Made with Goodnotes

Fra en funksjon f kan vi lage en ny funksjon f' som beskriver endring:



- endrer x fra a til $a+h$
- gir to punkter på grafen → sekant med stigningstall

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(a+h)-a} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- lar så $h \to 0$, og hvis grensen finnes: **den deriverte av f i $x=a$**

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- ↳ stigningstallet til tangenten i $(a, f(a))$

Made with Goodnotes

NB: Dette gir en ny funksjon f':

$f: x \to f(x)$ betyr $f': x \to f'(x)$

Hvis $f'(a) > 0$, vil funksjonen være lokalt

$\Rightarrow$: $f(a+h) > f(a)$ hvis $h > 0$ er liten.

Hvis $f'(a) < 0$, vil den være lokalt.

$\hookrightarrow$ mer senere!

Eks: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Har: $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{(2a+h)\cdot h}{h}$$

$$= 2a + h \to 2a \quad \text{når } h \to 0.$$

Så: $f'(a) = 2a$

$f'(x) = 2x$. Skriver: $(x^2)' = 2x$

Made with Goodnotes

Kan gjøre samme regning for polynoma:

$$(x^3)' = 3x^2 \quad , (x^4)' = 4x^3 , \ldots$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

Eksponentialfunksjonen: $f(x) = e^x$

Kan bruke at når h er liten er

$e^h \approx 1 + h$. Dermed

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \frac{e^a \cdot e^h - e^a}{h}$$

$$= \frac{e^a (e^h - 1)}{h} \approx \frac{e^a \cdot h}{h} = e^a$$

så man kan vise

$$(e^x)' = e^x$$

Veldig spesielt: funksjonen er lik sin deriverte!

Made with Goodnotes

Sinus / cosinus: Kan vise at

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{og} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

(bruker sin./cos bl.a. en sum og noen ulikheter for små vinkler)

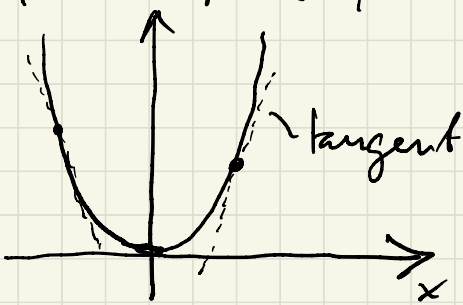
Den deriverte sier om funksjonen vokser/avtar.

Teorem 2.1.3

Hvis $f'(x) > 0$ på et intervall I (d.v.s. $f'(x) > 0$ for alle $x \in I$), så er f voksende på I. Tilsvarende, $f' < 0$ gir avtakende.

Eks: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

- $f' < 0$ på $\langle -\infty, 0 \rangle$, så avtakende
- $f' > 0$ på $\langle 0, \infty \rangle$, så voksende



Made with Goodnotes

Som regel slipper vi å bruke definisjonen til sjekke om f er deriverbar og finne f'. Bruker da

Regnereglen: Hvis $f, g : I \to \mathbb{R}$ (I – intervall) er deriverbar i x og c, d er konstanter, er

- $cf + dg$ deriverbar i x og
$$(cf(x) + dg(x))' = cf'(x) + dg'(x)$$
som kalles **linearitet**.

- $f \cdot g$ og $\frac{f}{g}$ er deriverbar i x (det siste hvis $g(x) \neq 0$) og
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

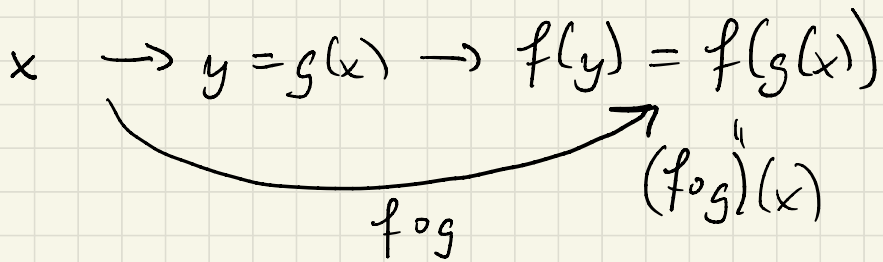
Eks: $f(x) = x^2 \cos x$ deriverbar og
$$f'(x) = 2x \cdot \cos x + x^2(-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

Made with Goodnotes

Kjæreregelen: Trengs ofte, spesielt i maskinlæring, å derivere sammensatte funksjoner:

$f \circ g$ definert som $f(g(x))$

så



Kjæreregel: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Begrunnelse (som brukes i bevis):

Har: $g(x+h) \approx g(x) + g'(x) \cdot h$ (fra def.)

Og: $f(g(x+h)) \approx f(g(x) + g'(x)\,h)$

$\approx f(g(x)) + \underbrace{f'(g(x)) \cdot g'(x)\,h}_{(f \circ g)'(x)}$

Made with Goodnotes

Viktig å lære seg i bruk av kjerneregel!

Eks: $h(x) = (1+\sin x)^2$

Her:

$$x \to \underbrace{1+\sin x}_{\text{kjernen } g(x)} \to (1+\sin x)^2 \qquad f(y) = y^2$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1+\sin x)$$
$$= (1+\sin x)^2$$

$$\Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= 2 \cdot g(x) \cdot g'(x)$$
$$= 2 \cdot (1+\sin x) \cdot \cos x$$

Eks:

$$h(x) = \underbrace{(x^2+4)}_{\text{kjerne}}^3 \quad \text{og } f(y) = y^3$$

$$h'(x) = 3(x^2+4)^2 \cdot (2x) = 6x(x^2+4)^2$$

(kunne regnet ut h men unngått)

Made with Goodnotes

Eks. $h(x) = \ln x$ (naturlig logaritme)

Har: $x = e^{\ln x}$ ($e^{\cdot}$ og ln. inverse f.)

Deriverer på begge sider og bruker kjerneregel:

$$1 = (e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'$$

$$\Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$=$$