MAT 1080

2.4

2.4 Globale ekstremalpunkter

$f : D_f \to \mathbb{R}$

Husk: c <u>globalt min. punkt</u> : $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$

c <u>globalt max. punkt</u> : $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.

Som nevnt: ønskelig, men ofte vanskelig å finne.

Derimot har vi et viktig resultat om <u>eksistens</u>.

<u>Teorem 2.4.2 (Ekstremalverditeoremet)</u>

Anta f er kontinuerlig på et lukket og begrenset intervall $I = [a, b]$. Da vil f oppnå sin minimumsverdi og sin maksimumsverdi på I

Made with Goodnotes

Så da finnes globalt minimumspunkt og globalt maksimumspunkt !!

$$f(c_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad , \quad f(c_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Eks: 1.) $f(x) = 2x \quad , \quad x \in [0,3]$

$$\min_{x\in[0,3]} f(x) = \min\{f(x) : x\in[0,3]\} = 0 = f(0)$$

$$\max_{x\in[0,3]} f(x) = \max\{f(x) : x\in[0,3]\} = 6 = f(3)$$

2.) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 3\sin(\sqrt{x^2})$

$$, \quad x \in [1,5]$$

f er kontinuerlig, $[1,5]$ er lukket og begrenset intervall

$\Rightarrow$ min- og max oppnås !

(men ikke så lett å finne)

Made with Goodnotes

Eks: $f(x) = (x-1)^2 + |x-2|$, $x \in [0,5]$

Ekstremalverditeoremet gir at min f og max f oppnås (f kont., $[0,5]$ lukket, begr.)

Kritiske punkt:

- 0 og 5 (endepunktene)
- 2 (f ikke deriverbar i $x=2$)
- hvis $x \neq 2$ er

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x-1) - 1, & \text{hvis } 0 < x < 2 \\ 3(x-1) + 1, & \text{hvis } 2 < x < 5. \end{cases}$$

Kan vi ha $f'(x) = 0$?

a) $0 < x < 2$: $f'(x) = 0 \iff 3(x-1) - 1 = 0$

$\iff x = \frac{4}{3}$ (som er i $\langle 0, 2 \rangle$)

b) $2 < x < 5$: $f'(x) = 0 \iff 3(x-1) + 1 = 0$

$\iff x = \frac{2}{3}$ (som ikke er i $\langle 2, 5 \rangle$)

Så kritiske punkt: $0, \frac{4}{3}, 2, 5$

Made with Goodnotes

Da må lokalt og globalt min. og max være blant disse punktene. Sjekker:

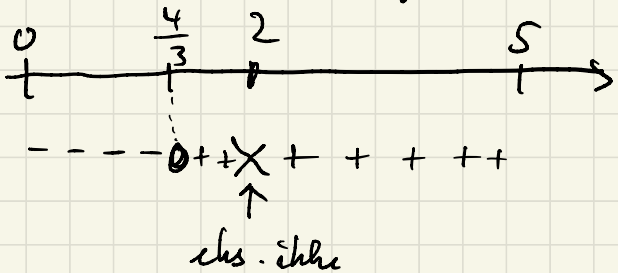
$\underline{x = 0}$: $f(0) = 3$ og $f'(x) < 0$ for x noe større enn 0, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -4$.

$\Rightarrow x = 0$ lokalt max. punkt

$\underline{x = \frac{4}{3}}$: $f(\frac{4}{3}) = \frac{7}{9}$ og $f'(x)$ skifter fortegn fra $-$ til $+$ i $x = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$ er lokalt min. punkt

$\underline{x = 2}$: $f(2) = 1$ Lager fortegnsskjema



$\Rightarrow x = 2$ er verken lokalt min. eller max punkt

Made with Goodnotes

$\underline{x = 5}$: $f(5) = 19$ og $f'(x) > 0$ for

x noe mindre enn 5

$\Rightarrow$ $x = 5$ er lokalt maks punkt

Dermed blir $x = 5$ også globalt maks punkt

($f(5) > f(0) = 3$, det andre lok. maks. pkt)

Og $x = \frac{4}{3}$ er globalt min. punkt

Og: minimumsverdi av f på $[0, 5]$ er $\frac{7}{9}$

maksimumsverdi av f på $[0,5]$ er 19

$\Longrightarrow$

Så: Litt jobb, men vi avklarte mye!

Made with Goodnotes