MAT 1080

2.5

2.5 Newtons metode

Dette er en numerisk metode for å finne (tilnærmet) løsning av likninger. Brukes også i optimering.

Viktig fordi å løse $f(x) = 0$ ofte er vanskelig, f.eks femtegradslikning.

Lineær likning lett: $ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$

$\Longleftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$.

Newtons metode approksimerer $f(x) = 0$ med lineære likninger, som en iterativ prosess.

Så vi får en følge $x_1, x_2, \ldots$

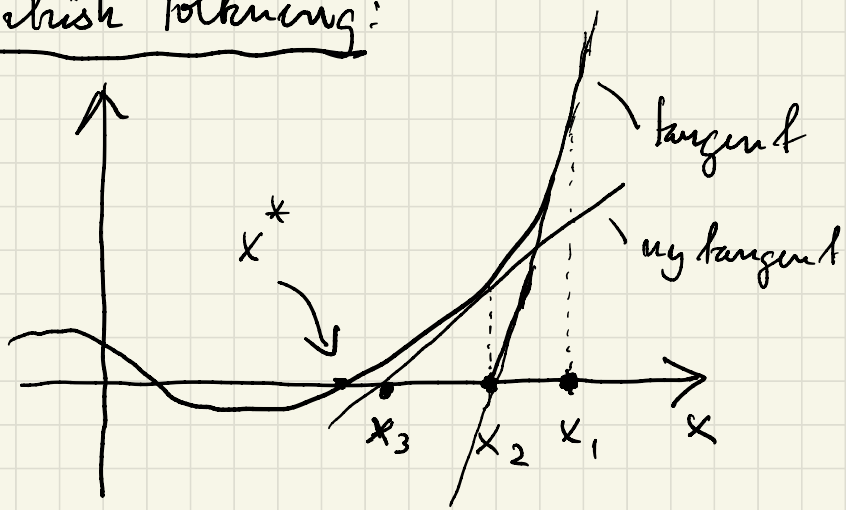
som, under visse betingelser konvergerer mot en løsning: $x_n \to x^*$ der

$$f(x^*) = 0.$$

Made with Goodnotes

NB: Stopper når vi er "nær nok" x^*, eller fordi antall iterasjoner er høyt.

Grafisk tolkning:



Utledning: Tangenten i $(x_k, f(x_k))$ gitt ved

$$y(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

som gir en lineær (affin) funksjon.

Finner nullpunkt for denne:

$$y(x) = 0 \iff f'(x_k)(x - x_k) = -f(x_k)$$

$$\iff x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Made with Goodnotes

som holder hvis $f'(x_k) \neq 0$.

Så

Newtons metode: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$k = 0, 1, \ldots$

Eks: Finne $\sqrt{a}$ s: løse $f(x) = x^2 - a = 0$

der $a > 0$ er gitt.

Her: $f'(x) = 2x$, så

Newton: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^2 - a}{2x_k}$

$= \dfrac{1}{2}\left(x_k + \dfrac{a}{x_k}\right)$

For $a = 5$ og med startpunkt $x_1 = 5$

får vi: $x_2 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{5}{5}\right) = 3$

$x_3 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{3}\right) = \frac{7}{3} = 2.33\ldots$

$\vdots$

$x_6 = 2.\underbrace{236068}_{\text{6 korrekte desimaler}}\ldots$

Made with Goodnotes

Kommentarer:

- metoden konvergerer svært raskt, typisk dobling av antall korrekte sifre i hver iterasjon
- kan gå galt! Men ikke hvis man starter "nær nok" x^* og $f'(x) \neq 0$ nær
- lett å programmere

Made with Goodnotes