MAT 1080

2.6

2.6 Krumning og vendepunkter

Def. 2.6.1 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ kalles *konveks* (eller "krummer opp") dersom f' er voksende på (a,b).



Konkav: f' er avtakende på (a,b).



NB: Alle lineære funksjoner er både konvekse og konkave.

Made with Goodnotes

Teorem 2.6.2 Anta f to ganger deriverbar på et intervall I. Da er:

(i) $f''(x) \geq 0$ for alle $x \in (a,b) \Rightarrow f$ konvekst

(ii) $f''(x) \leq 0$ — " — $\Rightarrow f$ konkav

Eks: $f(x) = 3x^2 - x + 2$

$\Rightarrow f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f''(x) = 6 \geq 0$

så f konvekst.

Faktisk: $f(x) = ax^2 + bx + c$ er konvekst hvis $a \geq 0$ og konkav for $a \leq 0$.

Eks: 1.) $f(x) = e^x$

$\Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x > 0$

$\Rightarrow f$ er <u>konvekst</u> ("strengt konvekst")

2.) $g(x) = \ln x \quad , x > 0$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Så g er <u>konkav</u>.

Made with Goodnotes

Optimering: Viktig resultat er <u>annenderivert-testen</u> ↓

<u>Teorem 2.6.3</u> La $f: I \to \mathbb{R}$, I intervall og f to ganger deriverbar på I. Anta at $f'(x_0) = 0$. Da vil

(i) hvis $f''(x_0) > 0$, vil x_0 være lokalt minimumspunkt for f

(ii) hvis $f''(x_0) < 0$, vil x_0 være lokalt maksimumspunkt for f.

—

Så for å finne lokale minimumspunkt der $f'(x) = 0$ sjekker vi fortegn på den andrederivarte i x.

Made with Goodnotes

Def. 2.6.4. Et <u>vendepunkt</u> er et punkt $x=c$ der funksjonen veksler fra konvekst til konkav, eller omvendt.

Merk (Teorem 2.6.5): Hvis $f''(c)$ eksisterer, og c er vendepunkt, så er $f''(c)=0$.

<u>Eks</u>: $f(x)=3x^4-4x^3+3$. Analyse:

$$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$$

$$f''(x)=36x^2-24x=12x(3x-2)$$

Fortegnsskjema for f':

	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$12x^2$	+	0	+	+	+
$x-1$	−	−	−	0	+
$f'(x)$	−	0	−	0	+
	avtakende	kritisk	avtakende	kritisk	voksende

Made with Goodnotes

$x = 0$: kritisk punkt, men ikke ekstremalpunkt

$x = 1$: lokalt min.punkt

Fortegnsskjema for f'':

	$x<0$	0	$0<x<\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$x>\frac{2}{3}$
$12x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	KON-VEKS		KONKAV		KONVEKS

VENDEPUNKT

Made with Goodnotes